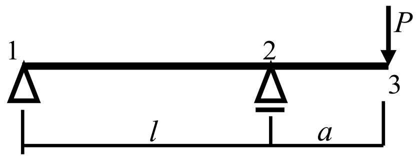
基礎６０話 No.3　はね出しを有する単純梁 ひじ型骨組　３ヒンジ門型ラーメン

付13話と付15話参照
ex52_1; ex53_1; ex38_2

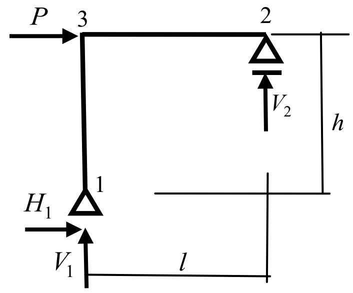
今回も単位荷重法を用いて、図８に示す静定構造物のたわみを求めてみよう。単位荷重法の計算式を再度以下に示す。

$$1\cdot d_m=\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\frac{N\cdot\bar{N}}{EA}+\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}\right)dx$$

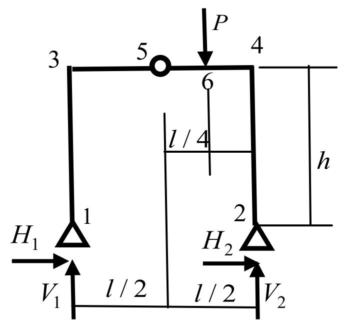
図８に示す骨組の断面力は既に求められている。これを利用して、単位荷重法により変位を求める。



(a) はね出しを有する単純梁



(b) ひじ型骨組

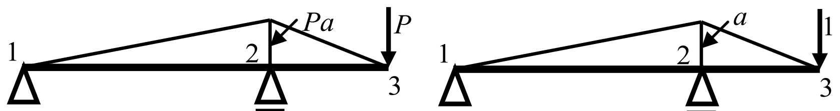


(c) ３ヒンジ門型ラーメン

図８ 静定構造物の変位

6) はね出しを有する単純梁　ex52_1

曲げモーメント図は図 9(a)に、また、はね出し先端の単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ も同様に、同図(b)に示される。



(a) 曲げモーメント図　　(b) 仮想曲げモーメント図

図９ はね出しを有する単純梁＋先端集中荷重の先端たわみ

部材 1–2 間及び 2–3 間の曲げモーメントと仮想曲げモーメントは

$$M_1(x)=-P(ax/l);\quad \bar{M}_1(x)=-(ax/l)$$

$$M_2(x)=P(x-a);\quad \bar{M}_2(x)=(x-a)$$

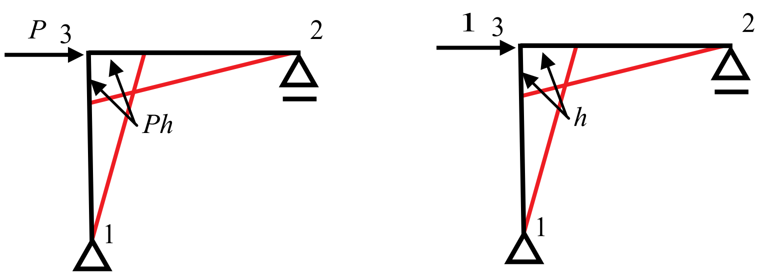
であり、先端のたわみ δ は、単位荷重法により、

$$\delta=\frac{P}{EI}\left\{\int_0^l(ax/l)(ax/l)dx+\int_0^a(x-a)(x-a)dx\right\}$$

で与えられる。後は上式を積分すれば良い。

$$\delta=\frac{P}{EI}\left\{\left(\frac{a}{l}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l+\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right]_0^a\right\}=\frac{P}{EI}\left(\frac{a^2l}{3}+\frac{a^3}{3}\right)=\frac{Pa^3}{3EI}\left(1+\frac{l}{a}\right)$$

7) ひじ型骨組　ex53_1



(a) 曲げモーメント図　　(b) 仮想曲げモーメント図

図 10 ひじ型骨組＋柱頭水平荷重の柱頭水平変位

柱と梁の断面二次モーメントが異なることに注意して、両者の曲げモ

ーメントと仮想曲げモーメントを求める。

$$M_c(x)=Px;\quad \bar{M}_c(x)=x$$

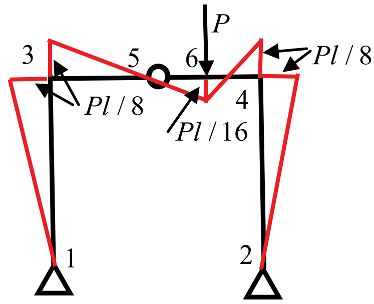
$$M_b(x)=Ph(1-x/l);\quad \bar{M}_b(x)=h(1-x/l)$$

柱頭の水平変位δは、単位荷重法により、

$$1\cdot\delta=\frac{P}{EI_c}\int_0^h x^2dx+\frac{Ph^2}{EI_b}\int_0^l(1-\frac{x}{l})^2dx$$

で与えられる。ここで、I_cは柱、I_bは梁の断面二次モーメントを各々表す。後は上式を積分すれば、柱頭水平変位が次のように得られる。

$$\delta=\frac{P}{EI_c}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h+\frac{Ph^2}{EI_b}\left[x-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{3l^2}\right]_0^l=\frac{Ph^3}{3EI_c}+\frac{Ph^2l}{3EI_b}=\frac{Ph^2}{3E}(\frac{h}{I_c}+\frac{l}{I_b})$$



(a) 曲げモーメント図

8) 3ヒンジ門型ラーメン＋梁偏位置鉛直荷重　　ex38_2

曲げモーメント図は図11(a)に示される通りであり、また、梁中央部の鉛直荷重による仮想曲げモーメント図は同図(b)に示される。

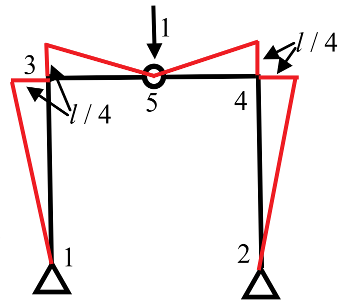
柱である部材1-3間と2-4間の曲げモーメントと仮想曲げモーメントは以下のようである。

$$M_{c1}(x)=-\frac{Pl}{8}(x/h);\quad \bar{M}_{c1}(x)=-\frac{l}{4}(x/h);\quad M_{c2}(x)=\frac{Pl}{8}(x/h);\quad \bar{M}_{c1}(x)=\frac{l}{4}(x/h)$$

また、梁は3-5間、5-6間及び6-4間の3つに分割して積分する。ここで用いる座標原点は、いずれも各分割部材の左側の節点とする。

$$M_{b1}(x)=\frac{Pl}{8}(-1+2x/l);\quad \bar{M}_{b1}(x)=\frac{l}{4}(-1+2x/l);M_{b2}(x)=\frac{Pl}{4}(x/l);$$

$$\bar{M}_{b2}(x)=-\frac{l}{2}(x/l);\quad M_{b3}(x)=\frac{Pl}{16}(1-12x/l);\quad \bar{M}_{b3}(x)=-\frac{l}{8}(1+4x/l)$$



(b) 仮想曲げモーメント図

(梁中央に単位集中荷重)

図11　3ヒンジ門型ラーメン＋梁鉛直荷重による中央の鉛直方向変位

上記の関数を用いて単位荷重法により、梁中央のたわみを求める。

$$1\cdot\delta=\frac{2Pl^2}{32EI_ch^2}\int_0^h x^2dx+\frac{P}{EI_b}\{\frac{1}{32}\int_0^{l/2}(-l+2x)^2dx-\frac{1}{8}\int_0^{l/4}x^2dx-\frac{1}{128}\int_0^{l/4}(l-12x)(l+4x)dx\}$$

上の積分を求めることで梁中央のたわみが得られる。ここでは、上の4つの積分を以下のように分割して行う。

$$\delta_1=\frac{2Pl^2}{32EI_ch^2}\int_0^h x^2dx=\frac{Pl^2}{16EI_ch^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{Pl^2h}{48EI_c}=\frac{Pl^2}{24}\frac{1}{2EI_c/h}=\frac{Pl^2}{24}\frac{1}{K_c}\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h}$$

$$\delta_2=\frac{P}{32EI_b}\int_0^{l/2}(-l+2x)^2dx=\frac{P}{32EI_b}\left[\frac{1}{3}(-l+2x)^3\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{l/2}=\frac{P}{192EI_b}(0-(-l)^3)=\frac{Pl^3}{192EI_b}$$

$$\delta_3=-\frac{P}{8EI_b}\int_0^{l/4}x^2dx=-\frac{P}{8EI_b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/4}=-\frac{Pl^3}{1536EI_b}$$

$$\delta_4=-\frac{P}{128EI_b}\int_0^{l/4}(l-12x)(l+4x)dx=-\frac{P}{128EI_b}\left[l^2x-4lx^2-16x^3\right]_0^{l/4}=-\frac{Pl^3}{128EI_b}(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=\frac{Pl^3}{512EI_b}$$

従って、梁中央の鉛直方向変位は、次式となる。

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4=\frac{Pl^2h}{48EI_c}+\frac{Pl^3}{EI_b}(\frac{1}{192}-\frac{1}{1536}+\frac{1}{512})=\frac{Pl^2h}{48EI_c}+\frac{10Pl^3}{1536EI_b}=\frac{Pl^2}{24}(\frac{1}{K_c}+\frac{5}{16K_b})$$

$$\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h};\quad K_b=\frac{2EI_b}{l}$$