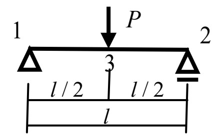
基礎５９話 No.2　単純梁と片持ち梁
中央集中荷重と等分布荷重

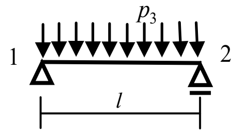
付2話参照
ex3_1 ~ ex3_4

今回は、仮想仕事の原理を応用した単位荷重法を用いて、図2と3に示す静定基本構造のたわみを求めてみよう。単位荷重法の計算式を再度以下に示す。

$$1\cdot d_m=\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\frac{N\cdot\bar{N}}{EA}+\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}\right)dx$$

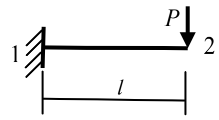


(a) 中央集中荷重

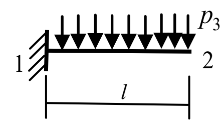


(b) 等分布荷重

図2 単純梁



(a)　先端集中荷重



(b) 等分布荷重

図3 片持ち梁

2）単純梁に梁中央集中荷重　ex3_1

図4の節点1–3間の単純梁の曲げモーメント関数は、

$$M(x)=Px/2$$

であり、単位集中荷重による仮想曲げモーメント$\bar{M}(x)$も同様に、

$$\bar{M}(x)=x/2$$

となる。上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、梁中央つまり最大たわみを求める。ただし、節点3–2間では、上記の値と同じとなることから、節点1–3間の積分値を2倍すれば良い。またここでは、曲げによるたわみのみ考慮するため、せん断力や軸力の項は無視する。

$$1\cdot\delta=2\int_0^{l/2}\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx$$

上の積分を計算すると、梁中央のたわみが求められる。

$$\delta=2\int_0^{l/2}\frac{Px\cdot x}{4EI}dx=\frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}=\frac{P}{2EI}\cdot\frac{l^3}{24}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

回転角の最大値は、両支持点で生じる。そこで節点1に単位モーメント荷重を加えて、仮想曲げモーメントを求めると、

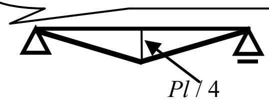
$$\bar{M}(x)=1-x/l$$

となり、節点1における回転角は、次のように求められる。

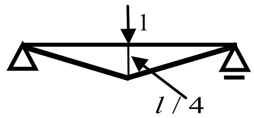
$$\theta=\int_0^l\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx=\frac{P}{2EI}\left(\int_0^{l/2}x(1-x/l)dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)(1-x/l)dx\right)=\frac{P}{2EI}\left(\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3l}\right]_0^{l/2}+\left[lx-x^2+\frac{x^3}{3l}\right]_{l/2}^{l}\right)$$

$$=\frac{Pl^2}{2EI}\left\{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)+\left(1-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)\right\}=\frac{Pl^2}{16EI}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{Pl^2}{16EI}$$

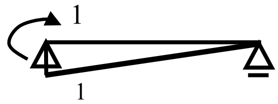
答え合わせは基礎50話を参照されたい。



(a) 曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図
（梁中央に単位集中荷重）



(c)　仮想曲げモーメント図
（梁端部に単位モーメント荷重）

図4　単純梁＋中央集中荷重

3）単純梁に等分布荷重　ex3_2

モデルの曲げモーメント分布は、既に次式として求められている。

$$M(x)=-p_wx^2/2+p_wlx/2=\frac{p_w}{2}(lx-x^2)$$

梁中央の単位集中荷重による仮想曲げモーメント$\bar{M}(x)$は、前例題と同じで以下の関数となる。

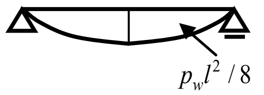
$$\bar{M}(x)=x/2$$

上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位

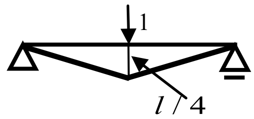
荷重法の計算式に適用して、梁中央つまり最大たわみを求める。

$$\delta = 2\int_0^{l/2} \frac{p_w(lx-x^2)\cdot x}{4EI}dx = \frac{p_w}{2EI}\left[\frac{lx^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{p_w l^4}{24EI}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\right) = \frac{p_w l^4}{384EI}(8-3) = \frac{5p_w l^4}{384EI}$$



(a) 曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図

（梁中央に単位集中荷重）

図 5 単純梁＋等分布荷重

4）片持ち梁に先端集中荷重　　ex3_3

ここでは、片持ち梁先端の回転角を求めてみよう。この場合の曲げモーメント関数は次式で与えられる。

$$M(x) = P(x-l)$$

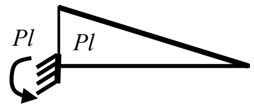
片持ち梁先端に加わる単位モーメント荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ は梁全体一様で、次式となる。

$$\bar{M}(x) = -1$$

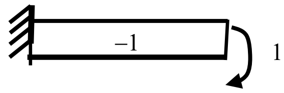
実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、片持ち梁先端の回転角 θ を求める。

$$1\cdot\theta = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx = \int_0^l \frac{P(x-l)(-1)}{EI}dx \rightarrow$$

$$\theta = \frac{P}{EI}\int_0^l (l-x)dx = \frac{P}{EI}\left[lx-\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{Pl^2}{2EI}$$



(a) 曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図

（梁端部に単位モーメント荷重）

図 6 片持ち梁＋先端集中荷重

5）片持ち梁に等分布荷重　　ex3_4

図 3(c) の等分布荷重による片持ち梁先端のたわみを求めてみよう。曲げモーメント関数は、次式で与えられている。

$$M(x) = p_w(-x^2/2+lx-l^2/2)$$

片持ち梁先端に加わる単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ は、以下の関数となる。

$$\bar{M}(x) = (x-l)$$

上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、先端のたわみを求める。

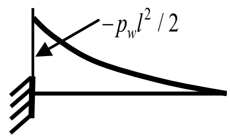
$$\delta = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx = \int_0^l \frac{p_w(-x^2+2lx-l^2)(x-l)}{2EI}dx = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l(-x^3+3lx^2-3l^2x+l^3)dx$$

$$= \frac{p_w}{2EI}\left[-\frac{x^4}{4}+lx^3-\frac{3l^2x^2}{2}+l^3x\right]_0^l = \frac{p_w l^4}{8EI}(-1+4-6+4) = \frac{p_w l^4}{8EI}$$

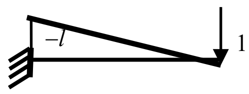
続いて、先端の回転角は次式で与えられる。ただし片持ち梁先端に加える単位モーメント荷重による仮想曲げモーメントは $\bar{M}(x) = -1$ である。

$$\theta = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx = \int_0^l \frac{p_w(-x^2+2lx-l^2)(-1)}{2EI}dx = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l(x^2-2lx+l^2)dx$$

$$= \frac{p_w}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}-lx+l^2x\right]_0^l = \frac{p_w l^3}{6EI}(1-3+3) = \frac{p_w l^3}{6EI}$$

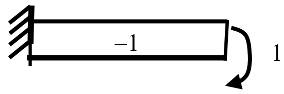


(a) 曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図

（梁先端に単位集中荷重）



(c) 仮想曲げモーメント図

（梁先端に単位モーメント荷重）

図 7 片持ち梁＋等分布荷重

答え合わせは基礎 56 話を参照されたい。