基礎５８話 No.1　単位荷重法の解説 片持ち梁先端集中荷重による先端変位

付２話参照
ex3_3

これまで、梁の微分方程式とモールの定理を用いて、基本的な梁のたわみを求めてきた。同法は、少し基本構造を拡張すると途端に解析自身が面倒となり、利用しづらい。そこで骨組の変位やトラス構造の変位を求める手法として、使い易い仮想仕事の原理による方法を紹介する。

仮想仕事の原理(principle of virtual work)とは、「ある物体に複数の力が作用して釣合状態にある場合、その物体が十分小さい仮想変位を受けるとき、その力の為す仕事はゼロである」である。言い換えると、「複数の外力が作用し、構造物が釣合状態にあるとき、境界条件を満足する任意の微小変形に対して、外力と内力のなす仕事は等しい」。この仮想仕事の原理は、1725 年ごろヨハン・ベルヌーイが創始したと言われており、その子のダニエルと弟子のオイラーが材料力学に応用した。

この仮想仕事の原理は色々なところで用いられるが、ここでは骨組の変位を求める手法として利用する。最初に、骨組に関する内力仕事を求めるが、まずは、断面力と歪の関係を復習する。

1）軸力と歪の関係： $N = EA\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 = N / EA$

2）曲げモーメントと曲率の関係： $M = EI\kappa \rightarrow \kappa = M / EI$

3）せん断力とせん断ひずみの関係： $Q = GA\gamma / k \rightarrow \gamma = kQ / GA$

上式において、ε_0 と κ は各々軸歪と曲げ歪に関する曲率を表す。また、k はせん断変形に関する断面の形状係数である。

部材内に蓄えられる内力仕事は、応力・歪を部材内について積分して求めるが、部材の断面力を利用すると次式左で表される。さらに、上の断面力と歪の関係を用いると次式右となる。

ベルヌーイ・オイラー梁ではせん断ひずみを考慮していないため、せん断力による仕事は発生しない。
このテキストでは、単位荷重法の第３項は考慮しないことになる。

1）軸力による仕事： $\int_0^l N\varepsilon_0 dx = \int_0^l \frac{N \cdot N}{EA} dx$

2）曲げモーメントによる仕事： $\int_0^l M\kappa dx = \int_0^l \frac{M \cdot M}{EI} dx$

3）せん断力による仕事： $\int_0^l Q\gamma dx = \int_0^l k\frac{Q \cdot Q}{GA} dx$

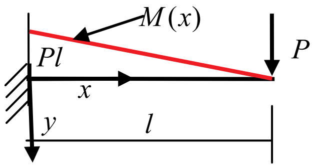
骨組内の任意点変位や回転角を求める手法として、先の仮想仕事の原理を応用した**単位荷重法**が便利である。最初に、単位荷重法の計算式を示し、後にその使用法について学ぶ。

R35：仮想仕事の原理で変位を求める：単位荷重法

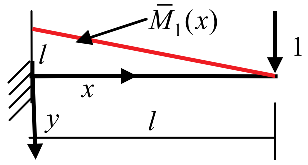
$$1 \cdot d_m = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l \left(\frac{N \cdot \bar{N}}{EA} + \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} + k\frac{Q \cdot \bar{Q}}{GA} \right) dx$$

荷重が加わり、釣り合った状態の実構造物と、全く同じ仮想の構造物

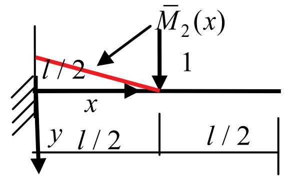
を考え、実構造物の特定点 m で変位 v_m を求めたいとき、仮想構造物内の対応点 $\bar{m}$ に単位集中荷重 $\bar{P}_m = 1$ あるいは単位モーメントを作用させる。その際、仮想骨組に生じる仮想の軸力、曲げモーメント、せん断力を各々 $\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$ とすると上式が成立し、d_m として実構造物の特定点の変位が得られる。これが**単位荷重法**といわれる理論である。同式の誘導は応用力学の専門書を読まれたい。単位荷重法は演習を通して理解しよう。



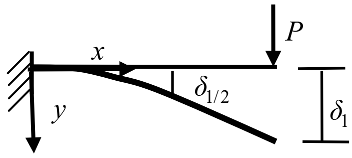
(a) 曲げモーメント図



(b) 先端単位荷重による曲げモーメント図



(c) 梁中央単位荷重による曲げモーメント図



(d) たわみ曲線

図 1 単位荷重法

1）片持ち梁に先端集中荷重　ex3_3

図 1(a)の梁先端に集中荷重が加わる片持ち梁について、先端と中央の変位を求める。この例題は梁の微分方程式で既に解かれており、曲げモーメント関数とたわみ関数は次式で与えられる。

$$M(x) = P(x-l);\quad v(x) = \frac{Pl^3}{6EI}(3(\frac{x}{l})^2 - (\frac{x}{l})^3)$$

上式右より先端及び梁中央のたわみを求めると、以下のようである。

$$v(l) = \frac{Pl^3}{6EI}(3-1) = \frac{Pl^3}{3EI};\quad v(\frac{l}{2}) = \frac{Pl^3}{6EI}(3(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^3) = \frac{Pl^3}{48EI}(6-1) = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

次に、単位荷重法を用いて、片持ち梁の先端及び梁中央のたわみを求めてみよう。先端集中荷重を受ける片持ち梁の曲げモーメント関数は、

$$M(x) = P(x-l)$$

であり、図 1(b)と(c)に示される先端及び梁中央の単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}_1(x)$ と $\bar{M}_2(x)$ は次式で与えられる。

$$\bar{M}_1(x) = (x-l);\quad \bar{M}_2(x) = (x - l/2) \leftarrow \quad x < l/2$$

上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、先端及び中央のたわみを求める。

$$1\cdot\delta_1 = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}_1}{EI}dx = \int_0^l \frac{P(x-l)(x-l)}{EI}dx = \frac{P}{EI}\int_0^l (x-l)^2 dx$$

$$1\cdot\delta_{1/2} = \int_0^{l/2} \frac{M\cdot\bar{M}_2}{EI}dx = \int_0^{l/2} \frac{P(x-l)(x-l/2)}{EI}dx = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2}(x-l)(2x-l)dx$$

ここで、図 1(d)に示されるように、δ_1 は片持ち梁先端のたわみを、また $\delta_{1/2}$ は梁中央のたわみを意味する。後は、上の積分を計算すれば良い。

$$\delta_1 = \frac{P}{3EI}\Big[(x-l)^3\Big]_0^l = \frac{P}{3EI}(0 + l^3) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\delta_{1/2} = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2}(2x^2 - 3lx + l^2)dx = \frac{P}{2EI}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3lx^2}{2} + l^2 x\right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{Pl^3}{2EI}(\frac{1}{12} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}) = \frac{Pl^3}{48EI}(2 - 9 + 12) = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

得られた結果は、梁の微分方程式で求めたたわみと同じとなる。このように、実構造物の断面力が判明すれば、容易に任意点の変位が求められることが分かる。