



基礎 5 7 話 No.4 ひじ型骨組 水平荷重による柱頭水平変位

付 13 話参照
ex53_1;

6) ひじ型骨組+水平荷重

ex53_1

このモデルは既に梁の微分方程式を用いて応力解析した。ここでは、モールの定理を用いて柱頭水平変位を求める。骨組は静定構造物であることから、断面力の求め方は、梁の微分方程式を用いた方法と全く同一である。簡単に振り返ってみよう。まず、反力は次式より求められる。

$$V_1 + V_2 = 0; \quad H_1 = P; \quad Ph - V_2 l = 0 \rightarrow V_1 = -Ph/l; \quad V_2 = Ph/l; \quad H_1 = P$$

次に、柱の曲げモーメントは、点1から x 点でのモーメントの釣合より次式となり、結果、曲げモーメント関数が右式として得られる。

$$-M(x) + H_1 x = 0 \rightarrow M(x) = Px$$

梁の曲げモーメント関数も同様に、節点3から x の位置でのモーメントの釣合より次式で与えられ、曲げモーメントは同式右となる。

$$-M(x) + H_1 h + V_1 x = 0 \rightarrow M(x) = Ph - \frac{Ph}{l} x$$

せん断力は、反力との力の釣合もしくは曲げモーメントの傾きから求められる。また、軸力は反力との力の釣合より得られる。梁の軸力は節点2の境界がローラー支持であることからゼロとなる。曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を各々図18に示す。

次に、モールの定理を用いて、柱頭の水平変位を求める。柱と梁の曲げモーメント関数を求めたので、その曲げモーメントを $-EI$ で割った関数を荷重とする。ただし、梁の断面二次モーメントは I_b であり、柱のそれは I_c とする。荷重の方向を考慮して、図 19 のように曲げモーメントと反対側に描く。

同図の断面力をそのまま求めても水平変位は得られない。なぜなら、梁の微分方程式は梁のたわみ、つまり図芯軸に対し直交方向の変位を求めており、節点3における変位の適合が得られない。つまり、梁の鉛直方向変位と柱の鉛直方向変位は異なるからである。そこで、梁と柱を分けてモールの定理を適用する。ここでは、両端の境界条件に気を付けてモールの定理を用いなければならない。

まず、図20に示す梁の断面力を求める。右端の支持点は元の骨組と同じでローラー支持で良い。ただし、左端の境界は柱の伸縮が解析では無視されるため、上下方向は拘束され、回転は自由、つまりピン支持と同じである。荷重は図のように三角形の分布荷重であり、左端は Ph/EI_b となる。この三角形の荷重の合力は $\bar{P}_b = Phl/2EI_b$ であり、荷重中心位置は左端より $l/3$ の位置となる。まず、荷重と反力との力の釣合より

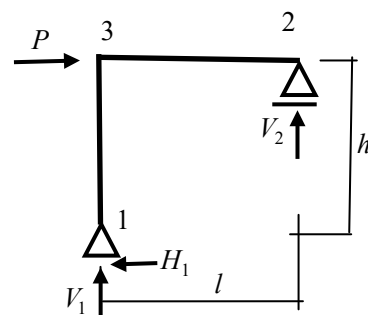
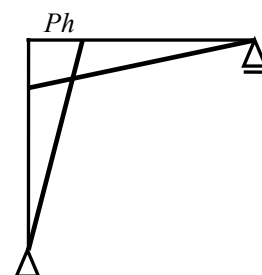
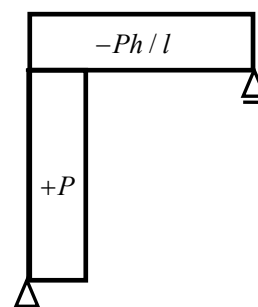


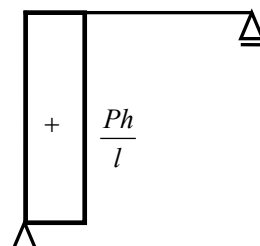
図 17 解析モデル



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 18 骨組の断面力図

次式が得られ、反力が求められる。

$$\frac{Phl}{2EI_b} - V_3 - V_2 = 0; \quad M_3 = 0: \frac{Phl}{2EI_b} \frac{l}{3} - V_2 l = 0 \rightarrow V_2 = \frac{Phl}{6EI_b}; \quad V_3 = \frac{Phl}{3EI_b}$$

梁に加わる荷重関数は、梁の曲げモーメント式より、

$$p_2(x) = \frac{1}{EI_b} (Ph - \frac{Ph}{l} x) = \frac{Ph}{EI_b} (1 - \frac{x}{l})$$

であり、左端から x の位置における曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M_2(x) = V_3 x - \int_0^x (x-X)p_2(X)dX = \frac{Phl}{3EI_b} x - \frac{Ph}{EI_b} \int_0^x (x-X)(1 - \frac{X}{l})dX$$

$$= \frac{Ph}{EI_b} \left\{ \frac{x^2}{2} - \left[xX - (1 + \frac{x}{l}) \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3l} \right]_0^x \right\} = \frac{Phl^2}{6EI_b} \left\{ 2(\frac{x}{l}) - 3(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})^3 \right\} \rightarrow v_2(x)$$

同様に、せん断力は次式で与えられる。

$$Q_2(x) = V_3 - \int_0^x p_2(X)dX = \frac{Phl}{3EI_b} - \frac{Ph}{EI_b} \int_0^x (1 - \frac{X}{l})dX$$

$$= \frac{Ph}{EI_b} \left\{ \frac{l}{3} - \left[X - \frac{X^2}{2l} \right]_0^x \right\} = \frac{Phl}{6EI_b} \left\{ 2 - 6\frac{x}{l} + 3(\frac{x}{l})^2 \right\} \rightarrow \theta_2(x)$$

ここで、節点3での梁の回転角 θ_3 は、上式に $x=0$ を代入することで、

$$\theta_2(0) = \theta_3 = Phl / 3EI_b \text{ となる。}$$

続いて、図21に示す柱の断面力を求めよう。両端の境界条件の設定は少し難しい。左端はピン支持であるが、右端は自由端であり、荷重として P_3 とモーメント \bar{M}_3 が加わる。柱の回転角は梁で求めた θ_3 に等しいので、せん断力 $Q(h)$ が θ_3 に等しく、材端の荷重は図の方向に $P_3 = \theta_3$ となる。三角形分布荷重の合力は $\bar{P}_c = Ph^2 / 2EI_c$ であり、荷重中心位置は左端より $2h/3$ となる。荷重と反力の鉛直方向の力の釣合より、 V_1 は

$$\frac{Ph^2}{2EI_c} - V_1 + P_3 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{Ph^2}{2EI_c} + \frac{Phl}{3EI_b} = \frac{Ph}{6E} \left(3\frac{h}{I_c} + 2\frac{l}{I_b} \right)$$

となり、柱のたわみと回転角の関数が以下のように得られる。

$$M_1(x) = V_1 x - \frac{1}{EI_c} \int_0^x P(x-X)dX = \frac{Ph^2}{2EI_c} x + \frac{Phl}{3EI_b} x - \frac{P}{EI_c} \left[\frac{xX^2}{2} - \frac{X^3}{3} \right]_0^x = \frac{Ph^2}{2EI_c} x + \frac{Phl}{3EI_b} x - \frac{Px^3}{6EI_c}$$

$$= \frac{Ph^3}{6EI_c} \left(-(\frac{x}{h})^3 + 2\frac{I_c}{I_b} (\frac{l}{h}) (\frac{x}{h}) + 3(\frac{x}{h}) \right) \rightarrow v_1(x)$$

$$Q_1(x) = V_1 - \frac{1}{EI_c} \int_0^x PXdX = \frac{Ph^2}{2EI_c} + \frac{Phl}{3EI_b} - \frac{P}{EI_c} \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^x$$

$$= \frac{Ph^2}{6EI_c} \left(-3(\frac{x}{h})^2 + 2\frac{I_c}{I_b} (\frac{l}{h}) + 3 \right) \rightarrow \theta_1(x); \quad Q(h) = \frac{Phl}{3EI_b} \rightarrow P_3$$

節点3の柱頭水平変位 δ は、柱のたわみ関数に $x=h$ を代入することで得られる。

$$\delta = v_1(h) = \frac{Ph^3}{6EI_c} \left(-1 + 2\frac{I_c}{I_b} \frac{l}{h} + 3 \right) = \frac{2Ph^3}{6} \left(\frac{1}{EI_c} + \frac{1}{EI_b} \frac{l}{h} \right) = \frac{2Ph^2}{3} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_b} \right)$$

ただし、柱と梁の曲げ剛性を次のように K_c, K_b で表す。

$$K_c = \frac{2EI_c}{h}; \quad K_b = \frac{2EI_b}{l}$$

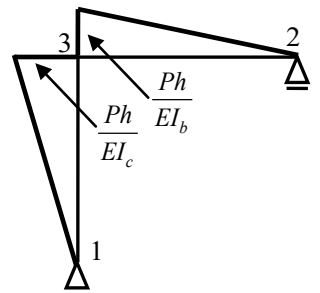


図 19 曲げモーメントを荷重に置き直した骨組

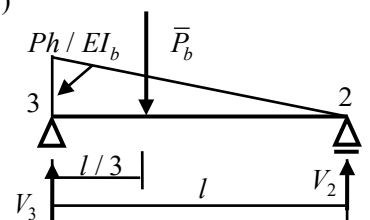


図 20 梁領域の力の釣合

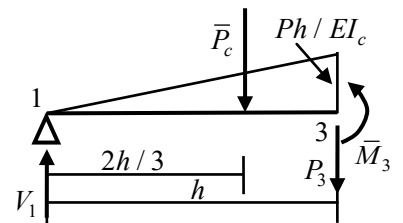


図 21 柱領域の力の釣合

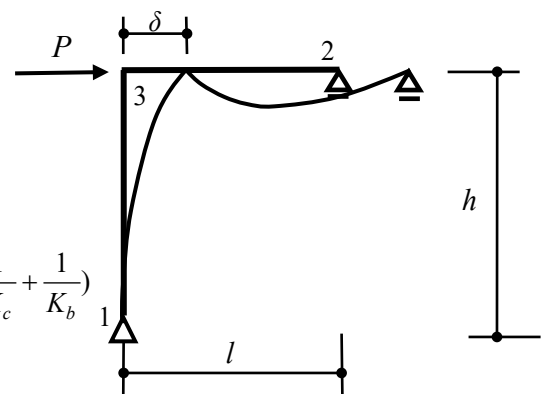


図 22 骨組の変形状態