基礎５６話 No.3　はね出しを有する単純梁　はね出し部等分布荷重による先端変位

付 14 話参照
ex56_1;

前回の続きで、モールの定理を用いて静定基本構造である片持ち梁の最大たわみを求める。まず、図 12 の荷重に対する固定端でのモーメント反力 M_2 と鉛直方向反力 V_2 を求める。節点 2 における曲げモーメント $M(l)$ とモーメント反力 M_2 の釣合、及びせん断力 $Q(l)$ と鉛直方向反力 V_2 の釣合より、モーメント反力が最大たわみとなり、鉛直方向反力が最大回転角となる。

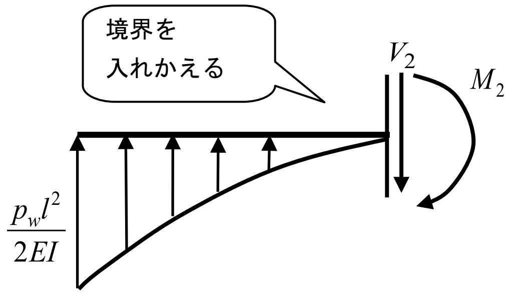


図 12 曲げモーメントを荷重に置き直す

モーメント反力 M_2 は、外力と反力との力の釣合より次式で求められる。ただし、等分布荷重を受ける単純梁と同様に、図 12 に示される荷重による節点 2 を中心とするモーメントは次の積分で表される。

$$M_2 - \int_0^l (l-X)\frac{p_w}{2EI}(l^2 - 2lX + X^2)dX = 0$$

上式の積分を実行すると、梁先端のたわみが次式として得られる。

$$M_2 = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (l-X)(l^2 - 2lX + X^2)dX = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (l^3 - 3l^2X + 3lX^2 - X^3)dX$$

$$= \frac{p_w}{2EI}\left[l^3X - 3l^2\frac{X^2}{2} + lX^3 - \frac{X^4}{4} \right]_0^l = \frac{p_w l^4}{8EI}(4-6+4-1) = \frac{p_w l^4}{8EI} \to \delta_{\max} = \frac{p_w l^4}{8EI}$$

片持ち梁先端の回転角は、モールの定理より反力 V_2 で与えられる。また反力 V_2 は、図 12 の分布荷重の合力に等しい。合力もモーメントと同様に次の積分で求められる。

$$V_2 = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (l^2 - 2lX + X^2)dX = \frac{p_w}{2EI}\left[l^2X - lX^2 + \frac{X^3}{3} \right]_0^l = \frac{p_w l^3}{2EI}(1-1+\frac{1}{3}) = \frac{p_w l^3}{6EI} \to \theta(l) = \frac{p_w l^3}{6EI}$$

5) はね出しを有する単純梁にはね出し部等分布荷重　ex56_1

このモデルは、はね出し(片持ち梁)部に等分布荷重が加わっている。モールの定理により、片持ち梁先端のたわみを求める。

最初に、反力を求めよう。両方向の力の釣合と節点 1 を中心とするモーメントの釣合を以下に示す。

$$\sum X = 0; H_1 = 0; \quad \sum Y = 0; \overline{P} - V_1 - V_2 = 0;$$

$$M_1 = 0; \overline{P}(l + a/2) - V_2 l = 0 \leftarrow \quad \overline{P} = p_w a$$

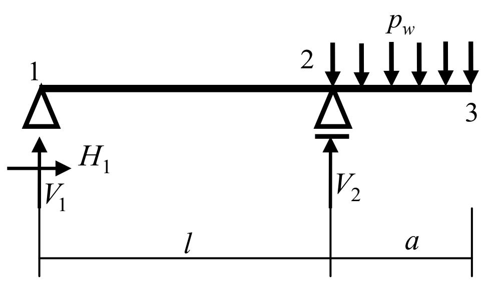


図 13 単純梁＋片持ち梁

上式を解き、以下のように反力を求める。

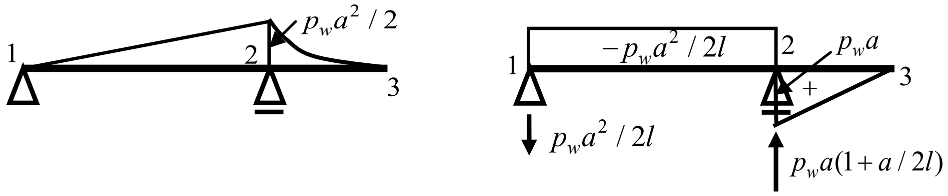
$$V_2 = p_w a(1 + a/2l); \quad V_1 = p_w a - p_w a(1 + a/2l) = -p_w a^2/2l; \quad H_1 = 0$$

次に、断面力分布を求める。曲げモーメントは、まず片持ち梁部分か

ら決める。片持ち梁の曲げモーメント分布は、他の部分の影響を受けないことから、端部の曲げモーメントは$M_2 = p_w a^2 / 2$となる。後は、単純梁部の曲げモーメントは、荷重が加わっていないため、両端の曲げモーメントを直線で繋げば、図 14(a)のように得られる。節点 1 を原点にすると、この曲げモーメント関数は次式となる。

$$M(x) = -\frac{p_w a^2}{2l} x$$

せん断力図も容易に求められ、支持点との力の釣合、もしくは曲げモーメントの傾きから、同図(b)のようになる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 14 単純梁＋片持ち梁の断面力分布

次に、梁のたわみをモールの定理により求めるが、単純梁部と片持ち梁部とに分けて解く必要がある。梁の微分方程式でもモールの定理でもモデルが少し複雑になると、理論解析は結構面倒になる。ここではまず、先の微分方程式で用いた手法に倣って、モールの定理より節点 2 の回転角を求めることにする。

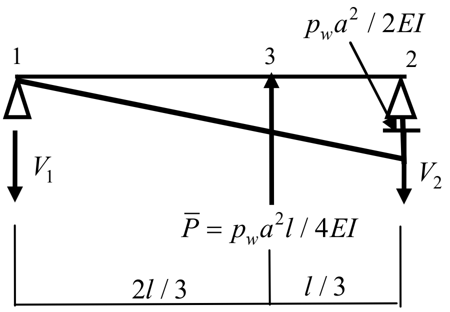


図 15 モールの定理を適用するためのモデル

先の基本構造の応力解析手法に従い、単純梁部の曲げモーメントを$-EI$で割り、荷重の方向は図 15 のように反対側となる。まず、反力から求めよう。分布荷重の合力は、$\overline{P} = p_w a^2 l / 4EI$であり、力の釣合より、次のように反力が得られる。

$$V_1 + V_2 - \frac{p_w a^2 l}{4EI} = 0; \quad M_1 = 0 : V_2 l - \frac{p_w a^2 l}{4EI}\frac{2l}{3} = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{p_w a^2 l}{6EI}; \quad V_1 = \frac{p_w a^2 l}{12EI}$$

節点 2 における回転角$\theta(l) = \theta_2$は、モールの定理によれば、その節点におけるせん断力に等しい。さらに、せん断力$Q(l)$は、反力との力の釣合より、$Q(l) = V_2 = p_w a^2 l / 6EI \rightarrow \theta_2$となり、回転角の値となる。この回転角によって、片持ち梁部が剛体回転し、先端の鉛直変位が、節点 2 の回転角に長さaを掛けることで、$\delta_2 = \theta_2 a = p_w a^3 l / 6EI$として求められる。

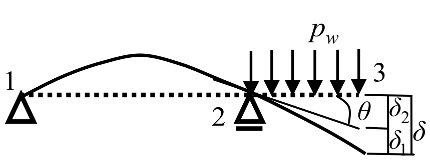


図 16 片持ち梁先端のたわみ

片持ち梁先端のたわみは、図 16 に示すように基本構造である片持ち梁＋等分布荷重のたわみδ_1に、上の節点 2 での回転角より生じるたわみδ_2を加えることで次のように求められる。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{p_w a^4}{8EI} + \frac{p_w a^3 l}{6EI} = \frac{p_w a^4}{24EI}(3 + 4\frac{l}{a})$$