基礎５５話 No.2　単純梁＋等分布荷重 片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_3; ex3_4

前回に続いて、モールの定理を用いて静定基本構造の最大たわみを求める。前回では等分布荷重の曲げモーメント関数を求めたので、その曲げモーメントを$-EI_z$で割った関数を荷重とし、モールの定理を適用する。荷重の方向は図 5 のように曲げモーメント図と反対側に描く。

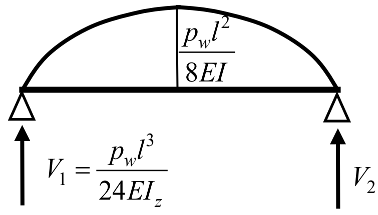


図 5 曲げモーメントを荷重に置き直し、反力を求める

まず、力の釣合より反力を求める。曲げモーメント関数は前回求めた。その関数を用いて、全荷重を以下のように積分して求める。

$$W = \int_0^l \frac{p_w}{2EI}(lx - x^2)dx = \frac{p_w}{2EI}\left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{p_w}{2EI}\frac{l^3}{6} = \frac{p_w l^3}{12EI}$$

対称応力状態を考慮し、鉛直方向反力V_1, V_2は以下のようである。

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{p_w l^3}{12EI} = \frac{p_w l^3}{24EI}$$

モールの定理によれば、上記の荷重に対して、梁中央の曲げモーメントがこの単純梁の最大鉛直変位である。梁中央を切断する手法より右図の梁中央での曲げモーメントM_Cを求める。まず、微小部分のモーメントdMは、先に求めたp_wの替わりに曲げモーメントの式を用いると、

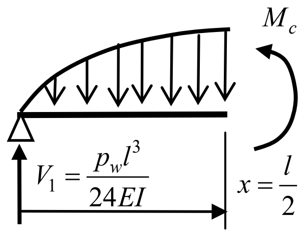


図 6 切断面における モーメントの釣合

$$dM = (\frac{l}{2} - X)\frac{p_w}{2EI}(lX - X^2)dX$$

となる。図 6 に示される分布荷重全体によるモーメントは、0 から$l/2$まで積分することによって得られる。梁中央でのモーメントの釣合より、M_Cは下右式となり、

$$-M_C + V_1\frac{l}{2} - \frac{p_w}{4EI}\int_0^{\frac{l}{2}}(l - 2X)(lX - X^2)dX = 0 \rightarrow M_c = \frac{p_w l^4}{48EI} - \frac{p_w}{4EI}\int_0^{\frac{l}{2}}(l^2X - 3lX^2 + 2X^3)dX$$

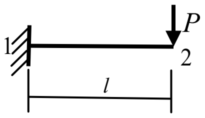
従って、梁中央の変位、つまり最大たわみは上式を積分することで求められる。

$$\delta_{\max} = \frac{p_w l^4}{48EI} - \frac{p_w}{4EI}\left[\frac{l^2X^2}{2} - lX^3 + \frac{X^4}{2}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{p_w l^4}{48EI} - \frac{p_w l^4}{4EI}(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32}) = \frac{p_w l^4}{48EI} - \frac{p_w l^4}{128EI} = \frac{5p_w l^4}{384EI}$$

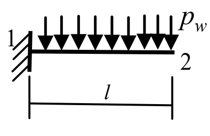
最大回転角は、材端に生じるため、次式で与えられる。

$$\theta_{\max} = V_1 = \frac{p_w l^3}{24EI}$$

3) 片持ち梁に先端集中荷重　ex3_3



(a) 先端集中荷重



(b) 等分布荷重

図 7 片持ち梁

続いて、図 7 に示す 2 つの基本構造である片持ち梁について、その最大たわみをモールの定理より求めてみよう。この 2 つのモデルの曲げモーメント分布は既に求めており、それを利用してモールの定理を適用する。モデル(a)の曲げモーメント分布は図 8 に示される。

モールの定期を適用するために、単純梁と同様、求めた曲げモーメン

トを$-EI$で割って、その値を荷重とし、図 9 のように荷重の方向を逆にする。さらに、片持ち梁では、同図のように境界条件である固定端と自由端を入れ替える。

まず、この荷重に対する節点 2 での曲げモーメントを求める。この端部の曲げモーメントが片持ち梁の最大変位となる。また、反力と端部の部材断面力との釣合より、反力を代用しても良い。

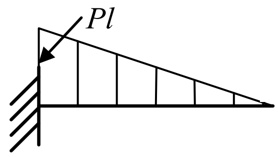


図 8 先端集中荷重＋片持ち梁の曲げモーメント図

分布荷重の合力Wは次式で、荷重中心は節点 2 から$2l/3$となる。

$$W=\frac{Pl}{EI}\frac{l}{2}=\frac{Pl^2}{2EI}$$

固定端でのモーメントの釣合よりM_2は次のようになり、モールの定理より、その値が変位となる。

$$M_2=\frac{Pl^2}{2EI}\frac{2l}{3}=\frac{Pl^3}{3EI}\rightarrow \quad \delta=\frac{Pl^3}{3EI}$$

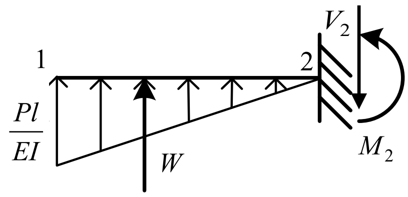


図 9 曲げモーメントを荷重に置き直す

また、反力V_2は、モールの定理によれば、片持ち梁先端の回転角となる。反力は次のように求められる。

$$V_2=\frac{Pl^2}{2EI}\rightarrow \quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{2EI}$$

以上のように、モールの定理を用いても、微分方程式の解と同一の結果が得られる。モールの定理は微分方程式を解く必要がなく、簡単に任意位置の変位を求めることができる。覚えておくと便利である。

4）片持ち梁に等分布荷重

ex3_4

図 7(b)に示す片持ち梁に等分布荷重が加わるとき、梁の最大変位をモールの定理により求める。最初に、曲げモーメント関数を求める。図 10 のように位置xで切断し、その点におけるモーメントの釣合より次式のように曲げモーメント関数が得られる。この関数より曲げモーメント図が図 11 に示される。

$$-M(x)-\int_0^x (x-X)p_w dX+V_1x-M_1=0\leftarrow \quad \int_0^x (x-X)p_w dX=p_w\left[xX-\frac{X^2}{2}\right]_0^x$$

$$-M(x)-p_w\frac{x^2}{2}+p_wlx-p_w\frac{l^2}{2}=0\rightarrow M(x)=\frac{p_w}{2}(-l^2+2lx-x^2)$$

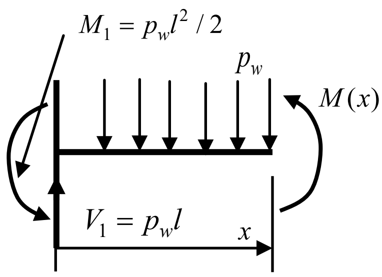


図 10 切断面におけるモーメントの釣合

モールの定理を適用するために、前例と同様、求めた曲げモーメントを$-EI$で割る。つまり荷重を逆方向から加える。ただし、図 12 のように境界である固定端と自由端を入れ替える。以降は次回お話しする。

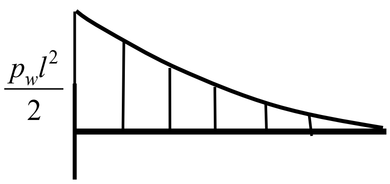


図 11 片持ち梁の曲げモーメント図

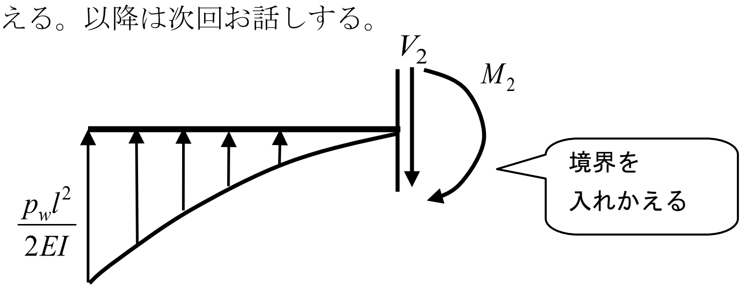


図 12 曲げモーメントを荷重に置き直す