基礎５４話 No.1　モールの定理の解説 単純梁＋中央集中荷重

付 2 話参照
ex3_1; ex3_2

これまでは微分方程式を解くことで、梁のたわみを求めた。断面力の釣合と梁の微分方程式が似ていることを利用し、微分方程式を解かずにたわみを求める手法がある。これを**モールの定理**という。今回は、この定理を用いて基本構造のたわみを求める。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI};\quad \frac{d^2M}{dx^2}=-P_w(x)$$

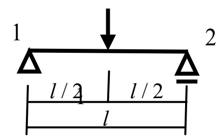
上式を比較すると、微分方程式の形は全く同じであり、右辺項が異なるのみである。従って、静的構造物で断面力分布を求める手法を使えば、微分方程式を解かなくても、たわみを求めることが可能となる。つまり、$-M(x)/EI$ を荷重分布 $p_w(x)$ であるとして、切断法などで断面力分布を求めれば良い。その際、得られた曲げモーメント分布がたわみに、せん断力分布が回転角に相当する。ただし、両微分方程式では、支持点の境界条件が異なるため、表 1 のように変更する必要がある。

表 1　両微分方程式の境界条件

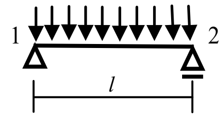
境界条件	梁の微分方程式		断面力の釣合方程式	
	変位	回転角	曲げモーメント	せん断力
自由端	自由	自由	ゼロ	ゼロ
ピンとローラー	ゼロ	自由	ゼロ	自由
固定	ゼロ	ゼロ	自由	自由

ここで、記号「自由」は断面力では反力に等しい。

上の表のように、両微分方程式では支持境界が異なるため、モールの定理を適用するためには、境界条件を自由端では固定に、固定では自由端に変更する必要がある。ここで、モールの定理をまとめておこう。



(a) 中央集中荷重



(b) 等分布荷重

図 1 単純梁

R34：モールの定理でたわみを求める

梁の曲げモーメントを $-EI$ で除し、その値を荷重と考えると、ある点のたわみはその点の曲げモーメントの値に、また、ある点の回転角はその点のせん断力に等しい。ただし、片持ち梁の場合は固定端と自由端とを入れかえる必要がある。

演習として、モールの定理を用いて、静定基本構造の最大たわみを求めてみよう。

1）単純梁に中央集中荷重　ex3_1

図 1 (a) の中央集中荷重の単純梁の曲げモーメント分布を $-EI$ で割る。つまり逆方向から加えることになる。解析モデルが図 2 に示されており、

まず反力を求める。全荷重は $l \cdot Pl/8EI$ であり、対称応力状態となるため、反力は $H_1 = 0;\ \ V_1 = V_2 = Pl^2/(16EI)$ となる。梁中央の曲げモーメント M_3 を求めるために、まず、節点 1−3 間に加わる荷重の総和（反力 V_1 に等しい）と荷重中心位置を求める。

次に、梁中央で切断し、支持点 1 を囲む閉曲線内で切断法を用いる。図 2 を参考に、節点 3 を中心とするモーメントの釣合より、最大曲げモーメント、つまりたわみの最大値が得られる。

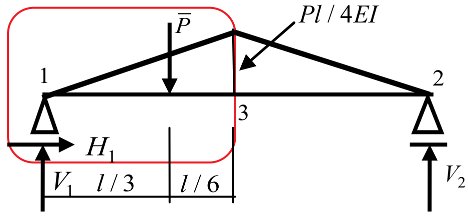


図 2 モールの定理を適用するためのモデル（曲げモーメントを荷重に置き直す）

$$M_3 = \frac{Pl^2}{16EI}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right) = \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{2l}{6} = \frac{Pl^3}{48EI} \rightarrow v_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

最大せん断力は、節点 1 に生じるため、次式で与えられる。つまり、最大回転角となる。

$$Q_1 = \frac{Pl^2}{16EI} \rightarrow \quad \theta_{\max} = \frac{Pl^2}{16EI}$$

2）単純梁に等分布荷重　ex3_2

先のモデルでは、図 2 の閉曲線内の荷重の総和と荷重中心位置は容易に求めることができた。しかし、このモデルの荷重は放物線で表されるため、荷重の総和と荷重中心を求めることは難しい。そこで、荷重の積分を用いて、任意位置における曲げモーメントと荷重の総和を求めてみよう。

まず、図 3 のように原点から x の位置で断面を切断し、反力と荷重及び断面力によるモーメントの釣合を考える。原点から X 位置の微小部分の荷重 $p_w dX$ が作用する際、モーメントは次式で表される。

$$dM = (x - X)p_w dX$$

従って、原点から位置 x までの荷重全てが作用するモーメントは、次のように上式を積分することで得られる。

$$M(x) = \int_0^x (x - X)p_w dX$$

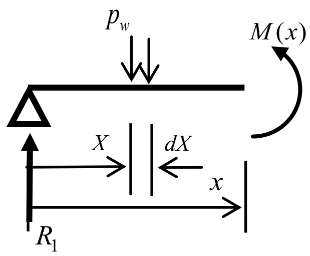


図 3 切断面における微小荷重によるモーメント

ここで、 p_w が定数、つまり等分布荷重の場合、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M(x) = \int_0^x (x - X)p_w dX = p_w\left[xX - \frac{X^2}{2}\right]_0^x = \frac{p_w x^2}{2}$$

上式を参考にすると、反力と荷重によるモーメントも含めて、点 x におけるモーメントの釣合は次式で与えられる。ただし、荷重は等分布とする。得られた曲げモーメント分布は図 4 に示される。

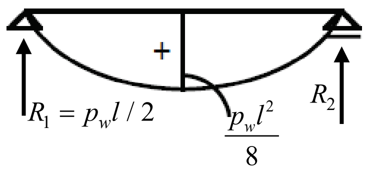


図 4 曲げモーメント図

$$-M(x) + R_1 x - \int_0^x p_w (x - X)dX = 0 \rightarrow \quad -M(x) + R_1 x - \frac{p_w}{2}x^2 = 0 \rightarrow$$

$$M(x) = \frac{p_w x}{2}(l - x) \quad \leftarrow R_1 = \frac{p_w l}{2};\quad M_{\max} = \frac{p_w l^2}{8} \quad \leftarrow x = \frac{l}{2}$$

以降は、次回お話しする。