基礎５３話 No.2　ひじ型骨組
水平荷重による柱頭水平変位

付 13 話参照
ex53_1

2）ひじ型骨組＋水平荷重　ex53_1

今回は、図4に示す骨組の断面力分布と柱頭の水平変位を求める。骨組は静定構造物であることから、最初に力の釣合から断面力を求める。まず、静定構造物の応力解析は反力を求めることから始める。反力を図4のように仮定し、荷重との力の釣合及び節点1に関するモーメントの釣合より、反力を求める。

$$V_1+V_2=0;\quad H_1=P;\quad Ph-V_2 l=0\rightarrow$$
$$V_1=-Ph/l;\quad V_2=Ph/l;\quad H_1=P$$

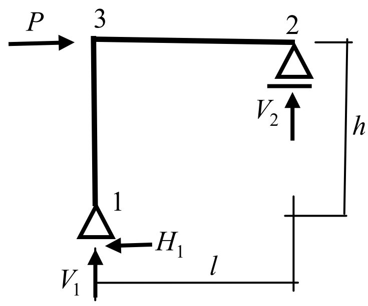


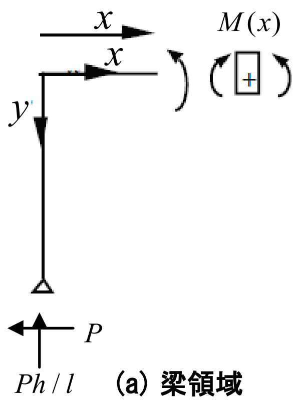
図 4 ひじ型骨組＋水平荷重

反力を求めた後は、断面力を求める。まず、図5(b)を参考にすると、節点1から x 点でのモーメントの釣合は次式となり、柱の曲げモーメントは下式右となる。

$$-M(x)+H_1 x=0\rightarrow\quad M(x)=Px$$

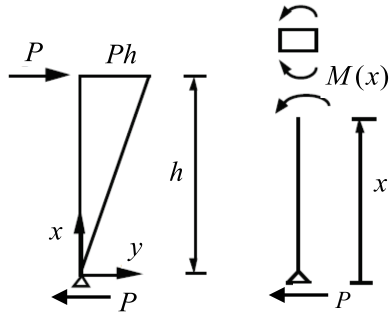
なお、曲げモーメント図は、図5(b)のように水平反力の尻尾側に描く。次に、節点3から x の位置でのモーメントの釣合は次式で与えられ、柱の曲げモーメントは同右式となる。

$$-M(x)+H_1 h+V_1 x=0\rightarrow\quad M(x)=Ph-\frac{Ph}{l}x$$



(a) 梁領域

せん断力は、反力との力の釣合もしくは曲げモーメントの傾きから求められる。また、柱の軸力は反力との力の釣合より得られ、梁の軸力は節点2の境界がローラー支持であることから、ゼロとなる。曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を各々図6に示す。



(b) 柱領域

図 5 部材のモーメントの釣合

次に、骨組の変形を求めてみよう。梁の微分方程式は、曲げモーメントから、節点1-3間の柱と節点3-2間の梁に対して、各々、

$$EI_c\frac{d^2v_1}{dx^2}=-Px\quad(1-3\text{間})；\quad EI_b\frac{d^2v_2}{dx^2}=\frac{Ph}{l}x-Ph\quad(3-2\text{間})$$

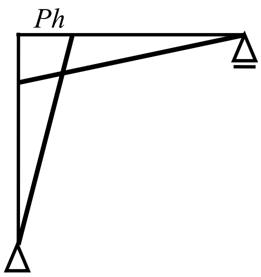
となる。ただし、部材の曲げ剛性は、柱では EI_c で、梁では EI_b とする。また、座標系は図5に示されており、各々の鉛直方向たわみとして、柱は v_1、梁は v_2 とする。上式を2回積分すると変位が次のように得られる。

$$EI_c v_1(x)=-\frac{Px^3}{6}+C_1x+C_2;\quad EI_b v_2(x)=\frac{Ph}{6l}x^3-\frac{Ph}{2}x^2+C_3x+C_4$$

梁の微分方程式では、柱が伸縮しないとすると、節点3は上下に変位しないこと、また節点2はローラー支持であるため上下に変位しないことより、次の境界条件が得られ、積分定数が求められる。

$$EI_b v_2(0)=C_4=0$$

$$EI_b v_2(l)=\frac{Phl^3}{6l}-\frac{Phl^2}{2}+C_3 l=0\rightarrow C_3=\frac{Phl}{3}$$



(a) 曲げモーメント図

得られた積分定数より梁のたわみ $v_2(x)$ 及び回転角 $\theta_2(x)$ は、

$$v_2(x)=\frac{Phl^2}{6EI_b}\left\{(\frac{x}{l})^3-3(\frac{x}{l})^2+2(\frac{x}{l})\right\};\quad \theta_2(x)=\frac{dv_2}{dx}=\frac{Phl}{6EI_b}\left\{3(\frac{x}{l})^2-6(\frac{x}{l})+2\right\}$$

ここで、節点3での梁の回転角 θ_3 は、上右式に $x=0$ を代入することで、$\theta_2(0)=\theta_3=Phl/3EI_b$ となる。

次に、柱の微分方程式の境界条件は、節点1ではピン支持であることより次式となり、積分定数 C_2 が求められる。

$$EI_c v_1(0)=C_2=0$$

一方、節点3では鉛直方向変位、つまり骨組では水平変位が生じる。この変位 δ は、柱のたわみ式に $x=h$ を代入することで得られる。

$$\delta=v_1(h)=\frac{1}{EI_c}(-\frac{Px^3}{6}+C_1x)\Big|_{x=h}=\frac{h}{EI_c}(-\frac{Ph^2}{6}+C_1)$$

他の境界条件として、節点3での回転角 θ_3 を用いる。図7に示すように、節点3では、梁と柱は90 度の角度で剛接しており、変形後もこの角度が保たれる。このため、梁の回転角 θ_3 と柱の回転角は等しい。節点3での柱の回転角 θ_3 は次式となり、梁の回転角と等しいと置くと、次式右が

$$\frac{dv_1}{dx}\Big|_{x=h}=\frac{1}{EI_c}(-\frac{Ph^2}{2}+C_1)=\theta_3 \rightarrow \frac{Phl}{3EI_b}=\frac{1}{EI_c}(-\frac{Ph^2}{2}+C_1)$$

得られる。上式より積分定数 C_1 は、次のように求められる。

$$C_1=\frac{I_c}{3I_b}Phl+\frac{Ph^2}{2}$$

得られた積分定数をたわみ関数 $v_1(x)$ と回転角 $\theta_1(x)$ に代入すると、たわみと回転角関数が、

$$v_1(x)=\frac{Ph^3}{6EI_c}(-(\frac{x}{h})^3+2\frac{I_c}{I_b}(\frac{l}{h})(\frac{x}{h})+3(\frac{x}{h}))$$

$$\theta_1(x)=\frac{Ph^2}{6EI_c}(-3(\frac{x}{h})^2+2\frac{I_c}{I_b}(\frac{l}{h})+3)$$

また、節点3での水平変位 δ は、柱のたわみ関数より、

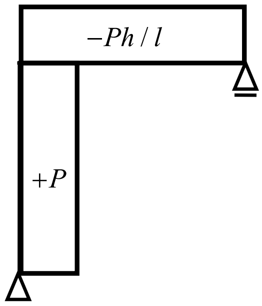
$$\delta=v_1(h)=\frac{Ph^3}{6EI_c}(-1+\frac{2I_c}{I_b}\frac{l}{h}+3)=\frac{Ph^2}{3E}(\frac{h}{I_c}+\frac{l}{I_b})$$

として得られる。ここで、柱と梁の曲げ剛性を次のように K_c, K_b で表し、

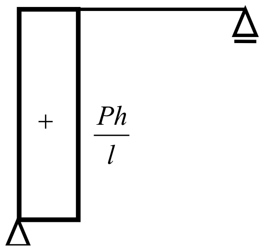
$$K_c=\frac{2EI_c}{h};\quad K_b=\frac{2EI_b}{l}$$

とすると、水平変位 δ は次式で与えられる。これで骨組の変形状態は全て求められた。その骨組の変形を図8 に示す。

$$\delta=\frac{2Ph^2}{3}(\frac{1}{K_c}+\frac{1}{K_b})$$



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 6 骨組の断面力図

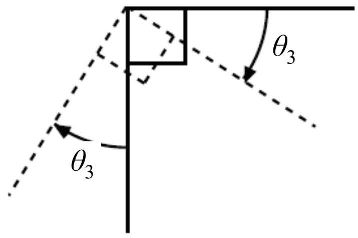


図 7 柱・梁接合部の回転角

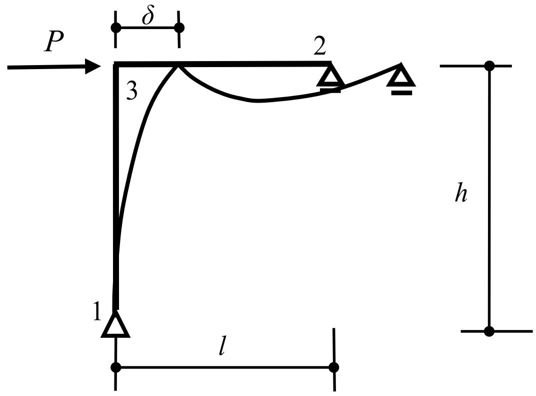


図 8　骨組の変形状態