基礎５２話 No.1　はね出しを有する単純梁 先端集中荷重による先端変位

付 13 話参照
ex52_1

前回では、梁の微分方程式を用いて、静定基本構造のたわみ式と回転角式を求め、最大値を求めた。ここではまず、これらの最大値をまとめておく。基本中の基本などで丸覚えしておこう。

R33：静定基本構造の最大曲げモーメントと最大たわみ

1:中央集中荷重＋単純梁

$$Q_{\max}=\frac{P}{2};\quad M_{\max}=\frac{Pl}{4};\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{16EI};\quad v_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

2: 等分布荷重＋単純梁

$$Q_{\max}=\frac{p_w l}{2};\quad M_{\max}=\frac{p_w l^2}{8};\quad \theta_{\max}=\frac{p_w l^3}{24EI};\quad v_{\max}=\frac{5p_w l^4}{384EI}$$

3: 先端荷重＋片持ち梁

$$Q_{\max}=P;\quad M_{\max}=Pl;\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{2EI};\quad v_{\max}=\frac{Pl^3}{3EI}$$

4: 等分布荷重＋片持ち梁

$$Q_{\max}=p_w l;\quad M_{\max}=\frac{p_w l^2}{2};\quad \theta_{\max}=\frac{p_w l^3}{6EI};\quad v_{\max}=\frac{p_w l^4}{8EI}$$

梁の微分方程式を用いて、基本構造以外の骨組の変位やたわみを求めることは、不可能ではないが一般に難しい。後で学ぶたわみ角法や固定法を用いたほうが、効率的である。ここでは、2 つの例題を用いて、梁の微分方程式を用いてたわみを求める。応力解析を行う過程を観察して、如何に面倒であるかを確認しよう。

1）はねだしを有する単純梁 ex52_1

解析モデルは、図 1 に示す梁であり、単純梁の先にはね出し(片持ち梁)が取り付いている。ここでは、片持ち梁の先端に鉛直方向の荷重が加わっており、その直下のたわみを求める問題である。ただし、梁断面は全て EI が一定であるとする。

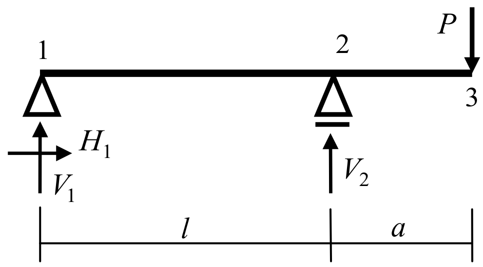


図 1 単純梁＋片持ち梁モデル

最初に、反力を求めよう。両方向の力の釣合と節点 1 を中心とするモーメントの釣合式を以下に示す。

$$\sum X=0; H_1=0;\quad \sum Y=0; P-V_1-V_2=0;$$
$$M_1=0; P(l+a)-V_2 l=0$$

上式を解き、反力を求める。

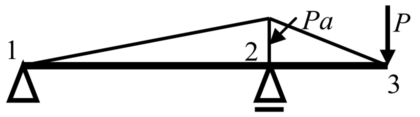
$$V_2=P(1+a/l);\quad V_1=P-P(1+a/l)=-Pa/l;\quad H_1=0$$

次に、断面力分布を求める。曲げモーメントは、まず、片持ち梁部分から決めるのが良い。片持ち梁の曲げモーメント分布は、他の部分の応

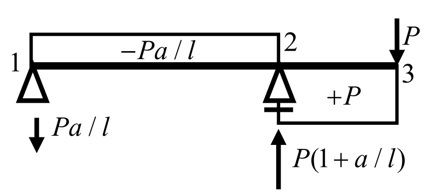
力状態から影響を受けないので、端部の曲げモーメントは$M_2 = Pa$とな
る。後は、単純梁部の曲げモーメントは、荷重がなく、また支持点では
ゼロであることから、両端を直線で繋げば、図 2(a)のように得られる。
節点 1 を原点にすると、曲げモーメント関数は次式で与えられる。

$$M(x) = -\frac{Pa}{l}x$$

せん断力図も容易に求められ、支持点との力の釣合、もしくは曲げモー
メントの傾きから、同図(b)のように求められる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 2 単純梁＋片持ち梁モデルの断面力分布

次に、梁のたわみを微分方程式により求めるが、単純梁部と片持ち梁
部とに分けて解く必要がある。先の基本構造の応力解析手法に倣って解
析を進める。まず、単純梁部の曲げモーメント関数は既に求められてお
り、これを使用すると梁の微分方程式は次式のようになる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}(\frac{Pa}{l}x); \quad \frac{dv(x)}{dx} = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^2}{2l} + C_1); \quad v(x) = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^3}{6l} + C_1x + C_2)$$

境界条件は梁両端でたわみがゼロとなり、これを上式に適用すると、

$$v(0) = C_2 = 0; \quad v(l) = \frac{Pa}{2EI}(\frac{l^2}{6} + C_1 l) = 0 \to C_1 = -\frac{l}{6}$$

となり、求めた積分定数をたわみ関数と回転角関数に代入すると次式が
得られる。

$$v(x) = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^3}{6l} - \frac{l}{6}x) = \frac{Pal^2}{6EI}((\frac{x}{l})^3 - \frac{x}{l})$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^2}{2l} - \frac{l}{6}) = \frac{Pal}{6EI}(3(\frac{x}{l})^2 - 1)$$

上式下より最大たわみは、左端より$l/\sqrt{3}$の位置で生じ、この値を上式
上に代入すると、

$$v(l/\sqrt{3}) = \frac{Pal^2}{6EI}(\frac{1}{3} - 1)\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{Pal^2}{9\sqrt{3}EI}$$

として、また、上式下に$x = l$を代入すれば、節点 2 における梁の
回転角が求められる。

$$\theta(l) = \frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{Pal}{6EI}(3-1) = \frac{Pal}{3EI}$$

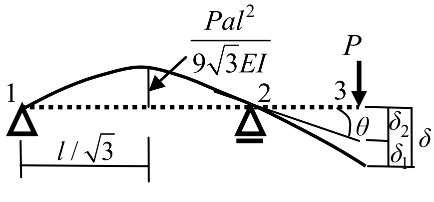


図 3 片持ち梁先端のたわみ

片持ち梁先端のたわみは、基本構造である片持ち梁＋先端集中
荷重のたわみδ_1に、上の節点 2 での回転角より生じるたわみδ_2の和とな
る。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pal}{3EI}a = \frac{Pa^3}{3EI}(1 + \frac{l}{a})$$