基礎５１話 No.2　単純梁＋等分布荷重 片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_2 ~ ex3_4

前回の続きで、単純梁に中央集中荷重の加わる場合で、右半分のたわみ関数を求めてみよう。梁右の曲げモーメント関数を用いると、梁の微分方程式は次式左となる。さらに、2 回積分すると右式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{P(x-l)}{2EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{2}x^2-lx+C_1);\quad v(x)=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{l}{2}x^2+C_1x+C_2)$$

境界条件は、梁中央でたわみの接線がゼロ、梁右のローラー支持部でたわみがゼロとなる。境界条件を上式に適用すると、

$$\frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=l/2}=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{8}l^2-\frac{1}{2}l^2+C_1)=0\to C_1=\frac{3}{8}l^2$$

$$v(l)=\frac{Pl^3}{2EI}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{C_2}{l^3})=0\to C_2=\frac{-l^3}{24}$$

求めた積分定数をたわみの式に代入すると、

$$v(x)=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{l}{2}x^2+\frac{3l^2}{8}x-\frac{l^3}{24})=\frac{Pl^3}{48EI}(4X^3-12X^2+9X-1)\leftarrow X=\frac{x}{l}$$

となり、上式右に $X=1/2$ を代入することで最大たわみが得られる。

$$v_{\max}=v(X=\frac{1}{2})=\frac{Pl^3}{48EI}(\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}-1)=\frac{Pl^3}{48EI}$$

2）図 1(b) の単純梁に等分布荷重　ex3_2

モデル (b) の梁の曲げモーメント関数を用いると、梁の微分方程式は次式左となる。2 回積分すると右式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{p_w(x^2-lx)}{2EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{3}x^3-\frac{l}{2}x^2+C_1);\quad v(x)=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{12}x^4-\frac{l}{6}x^3+C_1x+C_2)$$

上式に境界条件を適用し、未定定数の C_1 と C_2 を決定する。モデル (b) の境界条件として梁両端のたわみをゼロとする。境界条件を上式右のたわみ関数に適用すると、

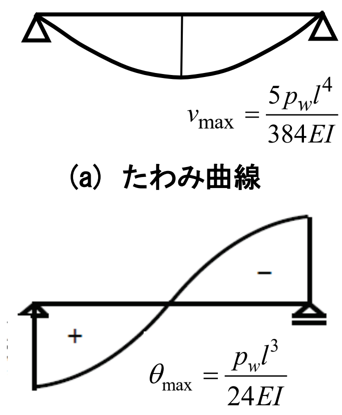
$$v(0)=\frac{p_w}{2EI}C_2=0\to C_2=0;\quad v(l)=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{12}l^4-\frac{l}{6}l^3+C_1l)=0\to C_1=\frac{l^3}{12}$$

となり、求めた積分定数を、たわみの式に代入すると次式が得られる。

$$v(x)=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{12}x^4-\frac{l}{6}x^3+\frac{l^3}{12}x);\quad v(X)=\frac{p_wl^4}{24EI}(X^4-2X^3+X)\quad\leftarrow X=x/l$$

最大たわみは梁中央に生じるので、上式右に $X=1/2$ を代入すると、

$$v_{\max}=v(X=\frac{1}{2})=\frac{p_wl^4}{24EI}(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})=\frac{5p_wl^4}{384EI}$$



(b) 回転角分布
図 5 等分布荷重を受ける単純梁のたわみと回転角

となり、最大たわみが得られる。回転角分布とその最大値は回転角関数に $x=0$ を代入することで得られる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{p_w l^3}{24EI}\left(4(\frac{x}{l})^3-6(\frac{x}{l})^2+1\right);\quad \theta_{\max}=\frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{p_w l^3}{24EI}$$

3）図 2(a)の片持ち梁に先端集中荷重　ex3_3

梁の微分方程式は、モデル(c)の曲げモーメント関数より次式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{P(l-x)}{EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{P}{EI}(lx-\frac{1}{2}x^2+C_1);\quad v(x)=\frac{P}{EI}(\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2)$$

境界条件は、片持ち梁の支持部が固定であることから、たわみはゼロ、回転角もゼロとなる。上記の式に、$x=0$ で $v(x)=0$ と $dv/dx=0$ を適用すると、

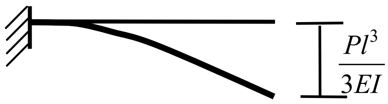
$$v(0)=\frac{P}{EI}C_2=0\to C_2=0;\quad \frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{P}{EI}C_1=0\to C_1=0$$

上記の積分定数をたわみの式に代入し、たわみ関数を求める。さらに、最大たわみは、片持ち梁の先端に生じるので、たわみ式に $x=l$ を代入すると、以下のように求められる。

$$v(x)=\frac{P}{EI}(\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3)=\frac{Pl^3}{6EI}(3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3);\quad v_{\max}(l)=\frac{Pl^3}{6EI}(3-1)=\frac{Pl^3}{3EI}$$

回転角分布は、上記のモデルと同様に、最大値は $x=l$ を適用すると

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{Pl^2}{2EI}\left(2(\frac{x}{l})-(\frac{x}{l})^2\right);\quad \theta_{\max}=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=l}=\frac{Pl^2}{2EI}$$



(a) たわみ曲線

(b) 回転角分布

図 6 先端集中荷重を受ける片持ち梁のたわみと回転角

4）図 2(b)の片持ち梁に等分布荷重　ex3_4

梁の微分方程式は、モデル(d)の曲げモーメント関数より次式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{p_w(x^2-2lx+l^2)}{2EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{p_w}{2EI}(\frac{x^3}{3}-lx^2+l^2x+C_1);\quad v(x)=\frac{p_w}{24EI}(x^4-4lx^3+6l^2x^2+C_1x+C_2)$$

境界条件は、片持ち梁の支持部が固定であることから、たわみはゼロ、回転角もゼロとなる。上記の式に、$x=0$ で $v(x)=0$ と $dv/dx=0$ を適用すると、積分定数が決定される。

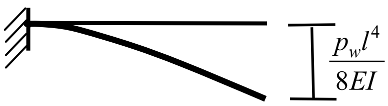
$$v(0)=\frac{p_w}{2EI}C_2=0\to C_2=0;\quad \frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{p_w}{2EI}C_1=0\to C_1=0$$

上記の積分定数をたわみの式に代入して、たわみ関数を求める。さらに、最大たわみは、片持ち梁の先端に生じるので、たわみ式に $x=l$ を代入することで求められる。

$$v(x)=\frac{p_w l^4}{24EI}((\frac{x}{l})^4-4(\frac{x}{l})^3+6(\frac{x}{l})^2);\quad v_{\max}(l)=\frac{p_w l^4}{24EI}(1-4+6)=\frac{Pl^4}{8EI}$$

回転角も前モデルと同様に求められる。最大値も、回転角の式に $x=l$ を代入することで、次式となる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{p_w l^3}{6EI}\left((\frac{x}{l})^3-3(\frac{x}{l})^2+3(\frac{x}{l})\right);\quad \theta_{\max}=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=l}=\frac{p_w l^3}{6EI}$$



(a) たわみ曲線

(b) 回転角分布

図 7 等分布荷重を受ける片持ち梁のたわみと回転角