基礎５０話 No.1　梁の微分方程式でたわみを求める　単純梁＋中央集中荷重

付 2 話参照
ex3_1

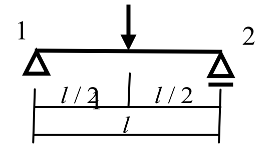
今回から、骨組の変位あるいは梁のたわみを求める手法を学ぶ。まずは、静定基本構造のたわみを求める。得られた結果を理解し丸覚えすれば、少し複雑な構造物の変形状態も理解できるようになろう。

断面力の釣合と梁の微分方程式は、次の 2 つの方程式で表される。

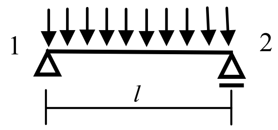
$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI};\quad \frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$$

静定構造では、梁や柱などの部材の断面特性に依存せず、断面力分布が決定する。つまり、上の右式のみを使用して、断面力が決まることになる。そこで、断面力分布が求まった後、上の左式を用いて、変位を求めることになる。無論、両者を同時に解き、断面力と変位を求めても良い。ただし、一般的に後者の方法は少し煩雑となる。

まず、図 1 と 2 に示す 4 つの基本構造の断面力分布を思い出してみよう。以下に、4 種の構造に関する曲げモーメント図とせん断力図を示す。

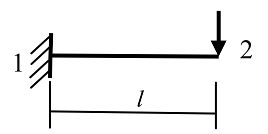


(a) 中央集中荷重

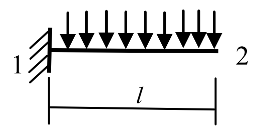


(b) 等分布荷重

図 1 単純梁

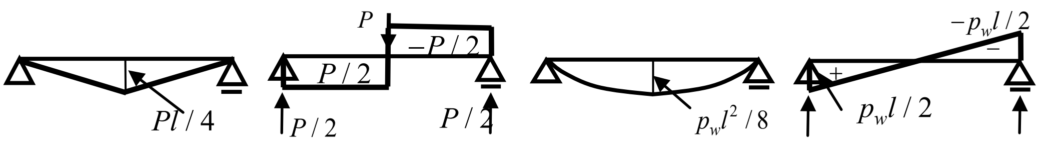


(a) 先端集中荷重



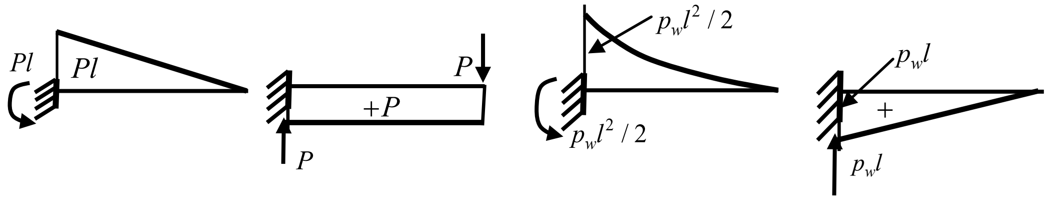
(b) 等分布荷重

図 2 片持ち梁



曲げモーメント図　　せん断力図　　曲げモーメント図　　せん断力図

(a) 単純梁＋集中荷重の断面力図　(b) 単純梁＋等分布荷重の断面力図



曲げモーメント図　　せん断力図　　曲げモーメント図　　せん断力

(c) 片持ち梁＋集中荷重の断面力図　(d) 片持ち梁＋等分布荷重の断面力図

図 3 静定基本構造の断面力分布

上記 4 つの基本構造の曲げモーメント関数を以下に示す。これらは既に求められている。以降、これらの関数を用いてたわみなどを求める。

R32：静定基本構造の曲げモーメント関数

モデル(a)：単純梁に中央集中荷重

$$M(x)=Px/2;\quad Q(x)=P/2\quad (x=0\sim l/2)$$

$$M(x)=-Px/2+Pl/2;\quad Q(x)=-P/2\quad (x=l/2\sim l)$$

モデル(b)：単純梁に等分荷重

$$M(x)=p_w(-x^2/2+lx/2);\quad Q(x)=p_w(-x+l/2)$$

モデル(c)：片持ち梁に中央集中荷重

$$M(x) = P(x-l);\quad Q(x) = P$$

モデル(d)：片持ち梁に等分布荷重

$$M(x) = p_w(-x^2/2 + lx - l^2/2);\quad Q(x) = p_w(-x+l)$$

1）図 1(a)の単純梁に中央集中荷重　ex3_1

このモデルでは梁の中央に集中荷重が加わっているため、2 つに分けて方程式を解く。ただし、対称変形となるため半分解けば良い。梁左の曲げモーメント関数を用いると、梁の微分方程式は次式左となる。さらに 2 回積分すると右式が得られる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P}{2EI}x;\quad \frac{dv(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}(-\frac{1}{2}x^2 + C_1);\quad v(x) = \frac{P}{2EI}(-\frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2)$$

上式右のたわみの式には、積分定数 C_1, C_2 がある。2 つの境界条件からこの積分定数を決定すれば、たわみ関数が得られる。

このモデルの境界条件は、左端がピン支持であり、たわみはゼロとなる。また対称変形であるため、中央のたわみが最大となり、その梁中央点におけるたわみの接線はゼロとなる。この 2 つの境界条件を次のように表すと、

$$v(0) = \frac{P}{2EI}(C_2) = 0;\quad \frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=l/2} = \frac{P}{2EI}(-\frac{1}{2}\cdot\frac{l^2}{4} + C_1) = 0$$

上式から、積分定数は $C_1 = l^2/8; C_2 = 0$ となり、この積分定数をたわみの式に代入すると、次式が得られる。このたわみ式は、梁左半分の式であることに注意されたい。

$$v(x) = \frac{P}{2EI}(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{l^2}{8}x)$$

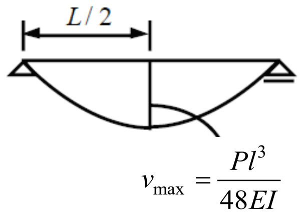
最大値は、上式に $x = l/2$ を代入することで得られる。

$$v_{\max} = v(x=\frac{l}{2}) = \frac{P}{2EI}(-\frac{1}{6}(\frac{l}{2})^3 + \frac{l^2}{8}\frac{l}{2}) = \frac{Pl^3}{2EI}(-\frac{1}{48} + \frac{1}{16}) = \frac{Pl^3}{48EI}$$

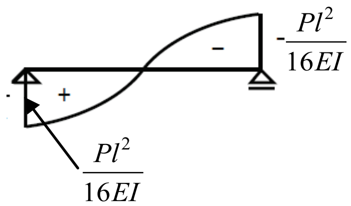
基本構造である単純梁に中央集中荷重が加わった際の最大曲げモーメント $Pl/4$ と共に、最大たわみ $Pl^3/48EI$ も、最も基本的な情報である。良く覚えておこう。最大たわみは、材料定数のヤング係数と断面二次モーメントに反比例し、荷重に正比例する。特に、梁長さの 3 乗に比例することを良く理解しておこう。

左半分の回転角分布は積分定数を代入して求め、最大値は $x=0$ を代入することで求められる。変形状態が対称であることを考慮して、たわみと回転角の分布を図 4 に示す

$$\theta(x=0) = \frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{P}{16EI}(-4x^2 + l^2)\Big|_{x=0};\quad \theta_{\max} = \frac{Pl^2}{16EI}$$



(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 4 中央集中荷重を受ける単純梁のたわみと回転角分布