基礎１８話 No.2　梁の微分方程式の一般解

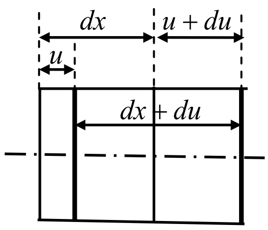

図 5 軸方向の歪

今回は、前回に続いて梁理論についてお話しする。ここでは特に軸方向の荷重による軸方向歪ε_0と軸方向応力σ_0及び軸力Nについてである。平面保持の仮定により、軸方向の荷重を受けると梁は図５のようになり、位置xの平面では軸方向変位$u(x)$を生じ、また位置$x+dx$の平面では軸方向変位$u(x)+du$の軸方向変位を生じる。２つの平面は変形後も平面を保ち、しかも平行のままとなる。そのため、平面内の任意の位置での変位は、図芯位置での変位に等しい。

図芯の微小長さdxは両平面の変位によって、その伸び量はduで与えられ、結果、軸方向歪は次式で与えられる。

$$\varepsilon_o = \frac{dx+du-dx}{dx} = \frac{du}{dx} \qquad \cdots\cdots(11)$$

さらに、歪を応力に変換し、断面全体で積分すると軸力Nが得られる。

$$\sigma_o = E_x\varepsilon_o = E_x\frac{du}{dx} \rightarrow \quad N(x) = E_x\int_A \varepsilon_o dA = E_x\int_A dA\frac{du}{dx} \qquad \cdots\cdots(12)$$

上式右の積分は断面積となるので、結果、軸力は次式となる。

$$N(x) = E_x A\frac{du}{dx} \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{E_x A} \quad \leftarrow \int_A dA = A \qquad \cdots\cdots(13)$$

以上のように軸方向の微分方程式は上式となる。

R17b：軸方向の微分方程式

3：軸方向の微分方程式：

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{E_x A} \quad \leftarrow \int_A dA = A$$

骨組の応力状態は曲げモーメント図、せん断力図、軸力図で表す場合が多い。そこで、前回お話しした曲げに対する梁の微分方程式と断面力に関する力の釣合式を用いて、各断面力の特徴を考えてみよう。断面力に関する力の釣合式は

$$\frac{dQ}{dx} = -p_w(x); \quad \frac{dM}{dx} = Q(x) \qquad \cdots\cdots(14)$$

であり、上式を積分することによって、せん断力と曲げモーメントが以下のように得られる。

$$Q(x) = -\int p_w(x)dx + C_1; \quad M(x) = \int Qdx = -\int\int p_w(x)dxdx + C_1x + C_2 \qquad \cdots(15)$$

このテキストでは、上式右の荷重項は、難しい関数について覚える必要はない。荷重がない場合、つまり集中荷重が加わる際の中間部と、等分布荷重となる定数項の場合、この程度を理解すれば良い。まず荷重が

ない場合、せん断力と曲げモーメントは、

$$Q(x) = C_1 \quad M(x) = C_1 x + C_2 \qquad \cdots\cdots(16)$$

となる。ここで、C_1 と C_2 は積分定数で、部材両端の応力の釣合より決定される。この場合、せん断力は一定値となり、曲げモーメントは一次式、つまり直線で表される。

次に、等分布荷重 p_w について、せん断力と曲げモーメントを求めてみよう。式(15)より、両断面力は

$$Q(x) = -p_w x + C_1 \quad M(x) = -\frac{1}{2} p_w x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \cdots\cdots(17)$$

となる。この場合、せん断力は直線となり、曲げモーメントは二次式、つまり放物線で表される。

次に、梁のたわみを求めてみよう。梁の微分方程式(9)の左式

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{E_x I_z} \qquad \cdots\cdots(18)$$

の両辺を積分して、回転角とたわみを求める。ただし、ここでは、部材の途中で断面形状は変化しないとする。

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{E_x I_z}\int M_z dx + C_3; \quad v(x) = -\frac{1}{E_x I_z}\int\int M_z dxdx + C_3 x + C_4 \qquad \cdots\cdots(19)$$

まず、荷重がない場合について、式(16)右を上式に適用すると、

$$\theta(x) = -\frac{1}{E_x I_z}(\frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3); \quad v(x) = -\frac{1}{E_x I_z}(\frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4) \quad \cdots\cdots(20)$$

となり、たわみは３次関数となる。次に、等分布荷重では式(17)右より、

$$\theta(x) = -\frac{1}{E_x I_z}(-\frac{1}{6}p_w x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3); \quad v(x) = -\frac{1}{E_x I_z}(-\frac{1}{24}p_w x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4) \quad \cdots(21)$$

となり、回転角は３次関数、たわみは４次関数となる。

梁内の釣合を示す微分方程式から種々の情報が得られる。上記のように曲げモーメントの１回微分はせん断力であり、せん断力の１回微分は荷重に負符号を付けた関数に等しい。逆に、荷重が加わっていないときは、せん断力は定数となり、曲げモーメントは直線でその傾きはせん断力の大きさに等しい。さらに、せん断力は、曲げモーメントを微分して求められることから、せん断力がゼロの位置で、曲げモーメントが極値となる。上記は非常に重要、必ず覚えておこう。

梁の微分方程式からの情報は曲げモーメント図やせん断力図を描く際、非常に有用である。良く覚えておこう。

R18：梁の微分方程式からの情報

１：次の項目を順番に覚えよう

1．荷重　2．せん断力　3．曲げモーメント　4．回転角　5．たわみ

２:次の関係から､荷重関数から上記の順に､冪次数が１次ずつ上がる。

$$\frac{dQ}{dx} = -p_w(x); \quad \frac{dM_z}{dx} = Q(x); \quad M_z(x) = -E_x I_z \frac{d\theta}{dx}; \quad \frac{dv}{dx} = \theta(x)$$