基礎１７話 No.1　ベルヌーイ・オイラー梁

今回は、梁理論についてお話しする。特に梁の挙動を支配する梁の微分方程式を求めてみよう。ここで説明する梁理論は、**ベルヌーイ・オイラー梁**といわれ、2 つの仮定：**平面保持の仮定と法線保持の仮定**から成り立っている。建築で使用される梁や柱は、ほぼこの仮定を満たすことになる。

弾性論における基本中の基本は、次の 2 つの関係である。

１）応力と歪の関係

２）変位と歪の関係

ベルヌーイ・オイラー梁では、上記 2 つの関係は次式で表されるように、各々1 つの式となる。

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x ;\quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y\frac{d^2 v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

応力も歪も軸方向(一般には x 方向とする)にのみ生じるとしており、下添え字 x で表す。軸方向しか考慮しないため下添え字を省いて、σ, ε と表記することもある。弾性係数 E_x も同様である。なお $v(x)$ はたわみを表す。ここでは、まず、2 つの仮定を用いて式(1)右を誘導する。

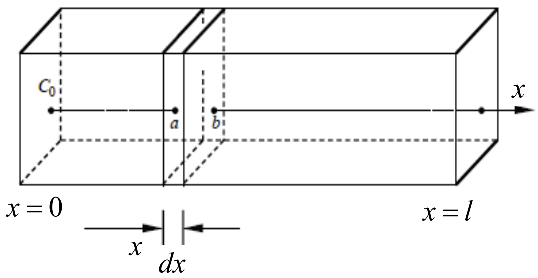

図１梁変形前の図芯に垂直な２つの平面

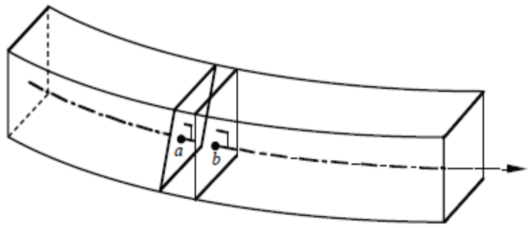

図 2 梁変形後の平面保持

梁理論の主目的は梁断面内の歪を、y 軸に関する 1 次式で表すことにある。図芯の軸方向変位の変化率は軸歪に、同じくたわみの曲率は曲げ歪に関連付けられる。このように簡単に断面内の歪が求められるのは、平面保持の仮定と法線保持の仮定による。

断面内に生じる力を、応力あるいは応力度という。応力と応力度、この言葉の使い分けは、本によって異なる。部材内に生じる力を応力とすると、それらの集合である軸力、曲げモーメントなどを総称して断面力と呼ぶ。また、応力に対して歪と呼ぶ。
一方、応力度と呼ぶと軸力や曲げモーメント、せん断力は総称して応力と呼ぶ。また、応力度に対して歪度を用いる。

R16：ベルヌーイ・オイラー梁の２つの重要な仮定

１：平面保持の仮定

２：法線保持の仮定

図 1 は梁が変形する前を示し、そこでは、左の原点より x 及び $x+dx$ 位置に、図芯に対し垂直に、しかも平行に平面が設定されている。梁理論では、図 2 のように梁が曲がって変形しても、2 つの平面はそのまま平面を保ち、しかも、図芯に対し垂直を保つと仮定する。前者が平面保持の仮定であり、後者が法線保持の仮定である。実際に、この仮定を用いて断面内の歪を求めてみよう。

図芯のたわみを $v(x)$ で表すと、位置 x における接線勾配は、法線保持の仮定から、図 3 のように元の平面からの傾斜角 θ に等しい。

$$\frac{dv}{dx} = \theta \qquad \cdots\cdots(2)$$

さらに、位置$x+dx$では、傾斜角は$\theta-d\theta$となる。ここでは、軸の正方向が引張となるように、増分角度を$-d\theta$とする。図 4 には、断面内の歪が理解し易いように、断面を少し変形して表示する。図芯からy離れた位置での両平面間の長さを求める。なお変形前の長さはdxである。

$$dx+y(\theta-d\theta)-y\theta=dx-yd\theta \qquad \cdots\cdots(3)$$

上の伸びた長さを用いると、歪の定義及び式(2)より、図芯からy離れた位置における歪は次式で与えられる。

$$\varepsilon_b(y)=\frac{dx-yd\theta-dx}{dx}=-y\frac{d\theta}{dx}=-y\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(4)$$

この歪がベルヌーイ・オイラー梁による曲げ歪となり、基礎 11 話の式(2)の曲げ歪κyに相当する。つまり、曲率κは$-d^2v/dx^2$である。

式(1)左の応力と歪の関係を用いて、上式より断面内の曲げによる軸方向応力σ_bを求める。

$$\sigma_b(y)=E_x\varepsilon_b=-E_xy\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(5)$$

上の軸方向応力によるz軸に関するモーメントを以下のように求める。これを曲げモーメントと呼ぶ。

$$M_z=\int_A y\sigma_b dA=-E_x\int_A y^2 dA\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(6)$$

上式右項内の積分は次のz軸に関する断面二次モーメントであり、

$$I_z=\int_A y^2 dA \qquad \cdots\cdots(7)$$

これを式(6)に適用すると、梁の微分方程式が得られる。

$$M_z=-E_xI_z\frac{d^2v}{dx^2}\rightarrow\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z} \qquad \cdots\cdots(8)$$

前回お話しした断面力と外力との力の釣合と上式とで、梁の曲げ挙動を表す微分方程式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z};\quad \frac{d^2M_z}{dx^2}=-p_w(x) \qquad \cdots\cdots(9)$$

さらに、断面が部材全体一様であると、上式左を 2 回微分し、同右式を代入すると、結果、次の 4 階の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^4v}{dx^4}=-\frac{1}{E_xI_z}\frac{d^2M_z}{dx^2}\rightarrow\quad E_xI_z\frac{d^4v}{dx^4}=p_w(x) \qquad \cdots\cdots(10)$$

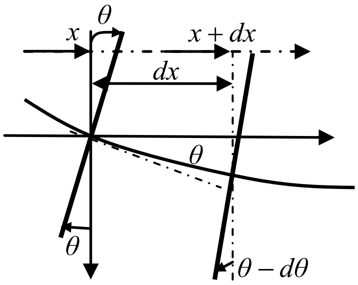

図 3 梁変形後の増分角度

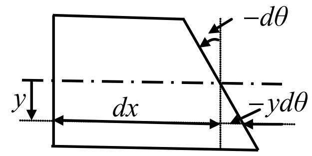

図 4 断面内の歪

梁の微分方程式は構造力学の基本中の基本である。良く覚えておこう

R17a：曲げによる梁の微分方程式

１：曲げを受ける梁の微分方程式は次の 2 式である

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z};\quad \frac{d^2M_z}{dx^2}=-p_w(x)$$

２：梁断面が部材内一様であるとき、次の微分方程式を用いても良い

$$E_xI_z\frac{d^4v}{dx^4}=p_w(x)$$