基礎１６話　断面力による力の釣合

今回は、断面力による力の釣合についてお話しする。これまで、軸力と曲げを同時に受ける部材に関する、断面内の応力と断面力についてお話しした。以下に、復習としてまとめておこう。

R13：軸力と曲げを受ける部材内の応力と断面力

１：軸力による断面内応力は一様で σ_0

２：曲げによる断面内応力は y 軸に関し一次式で σ_b

３：軸力の定義式：$N=\int_A \sigma_0 dA$

４：曲げモーメントの定義式：$M=\int_A \sigma_b y dA$

５：軸力と曲げモーメントを同時に受ける断面内応力：

$$\sigma_x=\sigma_0+\sigma_b=\frac{N}{A}+\frac{M}{I_z}y$$

６：縁応力は断面内の最大応力：

$$\sigma_t=\frac{N}{A}+\frac{M}{Z_t};\quad \sigma_c=\frac{N}{A}-\frac{M}{Z_c}$$

これまでに出てきた「軸力と曲げを同時に受ける部材内の応力と断面力の関係」及び断面性能をまとめる。構造力学における基本中の基本なので、しっかりと覚えておこう。

これまでに出てきた断面性能も以下にまとめる。

R14：断面性能とその機能

１：$A=\int_A dA$ ：断面積；　軸方向剛性に関係

２：$S_z=\int_A y dA$ ：断面一次モーメント；　図芯を求める

３：$I_z=\int_A y^2 dA$ ：断面二次モーメント；　曲げ剛性に関係

４：$Z_t=\dfrac{I_z}{y_t};\quad Z_c=\dfrac{I_z}{y_c}$ ：断面係数；　縁応力に関係

y_t と y_c は断面内で図芯位置から断面縁までの距離

ここでは、梁断面内の力の釣合について考えよう。ただし、梁内部の応力による力の釣合ではなく、断面力を用いた力の釣合である。まず、原点から x の位置にある部材の微小部分、長さ dx 間における力の釣合を、図1を参考にして考える。微少部分の両端には断面力、つまり曲げモーメント $M(x)$ とせん断力 $Q(x)$ が、また、部材上端には、分布荷重 $p_w(x)$ が加わっているものとする。曲げモーメント $M(x)$ は偶力であり、図に示した偶力を正とし、逆方向を負とする。ただし、ここでは軸力は考えない。微少部分の右端の断面力には、断面力 dM と dQ が付加されている。これは、微小長さ dx で断面力が変化するとして加えている。また、これ以後、表現が不明確とならない場合は、$M(x)$ と $Q(x)$ を M,Q とし、

略して示す。

最初に、上下方向の力の釣合を考えよう。次式が上下方向の力の釣合であり、考えている範囲が微少部分であることから、荷重は変化しないとして、$p_w(x)$ に dx を掛けた値を用いる。以上の関係より、上下方向の力の釣合は、

$$-Q+(Q+dQ)+p_w dx=0$$

となる。上式を整理し、微小長さ dx で割ると、微分形式で上下方向の釣合式が次のように得られる。これは力の釣合の第１式である。

$$\frac{dQ}{dx}=-p_w(x)$$

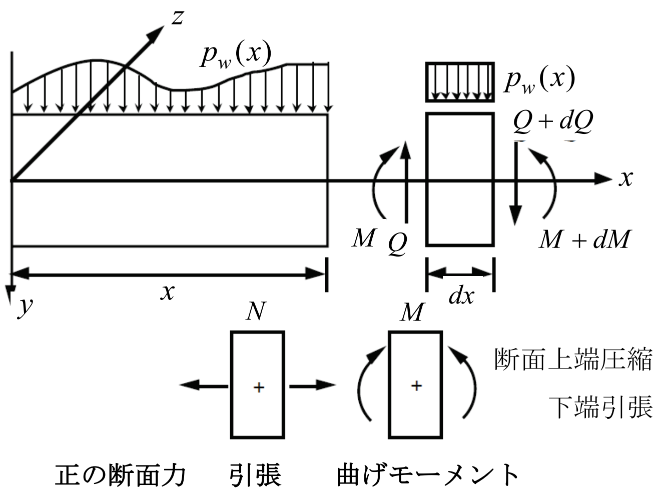

図 1 部材内の断面力による力の釣合

次にモーメントの釣合を考える。任意の位置でモーメントの釣合を考えても良いが、ここでは、モーメントの回転中心を微小部分の中心位置とする。この位置を回転中心とすると、荷重は自己釣合の状態となり、考慮しなくても良い。荷重を除いた各断面力によるモーメントの釣合は次式となる。

$$M-(M+dM)+Q\frac{dx}{2}+(Q+dQ)\frac{dx}{2}=0$$

上式を整理すると共に、他の項に比較して、より小さな値となる二次の微小項である $dQdx$ を省略し、微小長さ dx で割ると、力の釣合の第2式であるモーメントの釣合が以下のように得られる。

$$\frac{dM}{dx}=Q$$

さらに、上式の両辺を微分し、第１式を考慮すると次式が得られる。

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$$

以上をまとめると、梁内の上下方向の釣合とモーメントの釣合は、次の微分方程式で表される。この釣合式が、梁内の力の釣合を表し、**この方程式だけで応力状態が決定する骨組を静的構造である**という。

R15：断面力による力の釣合

１：せん断力と鉛直荷重の関係：　$\frac{dQ}{dx}=-p_w(x)$

２：せん断力と曲げモーメントの関係：　$\frac{dM}{dx}=Q$

３：曲げモーメントと鉛直荷重の関係：　$\frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$