基礎１５話　断面内の応力 モールの応力円

　ここまでは、断面内の応力を図芯に対し垂直の面で考えていた。今回は斜めの面で、応力状態がどのようになっているかについてお話しする。図 1(a)には $x-y$ 座標に平行で微小な矩形を取り出し、そこに働く応力を示す。力の釣合より $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau$ である。

　次に、同図(b)のように角度 φ で長さ l の斜面に働く応力 $(\sigma_\varphi,\tau_\varphi)$ を力の釣合より求めてみよう。x 方向と y 方向の力の釣合は

$$\left.\begin{aligned} x:&\ \ l\sigma_\varphi\cos\varphi-l\tau_\varphi\sin\varphi-l\cos\varphi\sigma_x-l\sin\varphi\tau=0\\ y:&\ \ l\sigma_\varphi\sin\varphi+l\tau_\varphi\cos\varphi-l\sin\varphi\sigma_y-l\cos\varphi\tau=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

となり、$(\sigma_\varphi,\tau_\varphi)$ について解くと、角度 φ における応力が求められる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\varphi&=\sigma_x\cos^2\varphi+2\tau\sin\varphi\cos\varphi+\sigma_y\sin^2\varphi=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\varphi+\tau\sin2\varphi\\ \tau_\varphi&=\tau(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-(\sigma_x-\sigma_y)\sin\varphi\cos\varphi=\tau\cos2\varphi-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\varphi\end{aligned}\right\}\cdot(2)$$

　次に、応力が最大・最小となる角度を $\varphi=\alpha$ とし、このときの応力を求める。まず、上の第 1 式を用いて、応力が極値となる角度を以下のように $\partial\sigma_\varphi/\partial\varphi=0$ より求める。

$$-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau\cos2\alpha=0\rightarrow\tan2\alpha=\frac{\tau}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}\qquad\cdots\cdots(3)$$

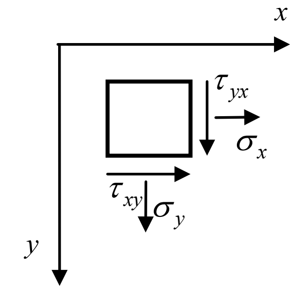
上式は角度が $2\alpha+\pi$ でも成立する。つまり、最大応力と最小応力を示す方向間の角度は 90 度ずれており、互いに直交している。上式の最大応力を示す角度 α を用いると次の関係が得られる。

$$\cos2\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\alpha}}=\frac{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}\qquad\cdots\cdots(4)$$

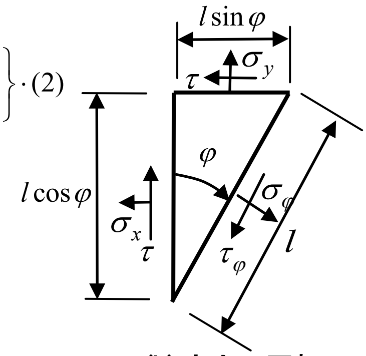
$$\sin2\alpha=\tan2\alpha\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\alpha}}=\frac{\tau}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}\frac{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}=\frac{\tau}{\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}\qquad\cdots\cdots(5)$$

また、最小応力となる角度 $\alpha+\pi/2$ を用いると上式の右辺項には、両者共に負記号が加えられる。最大応力を σ_1、最小応力を σ_2 とし、上式を式(2)の第 1 式に代入すると最大応力と最小応力が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2}{\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}+\frac{\tau^2}{\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}\\ \sigma_2&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}\end{aligned}\right\}\cdot(6)$$



(a)断面内の応力



(b)応力の回転

図 1 梁断面内の応力と平面応力の回転

式(1)の上の第 1 項は、斜め面に垂直な σ_φ の x 方向分力、第 2 項は、同じく τ_φ の x 方向分力、第 3 項は長さが $l\cos\varphi$ で軸方向応力 σ_x、第 4 項は長さ $l\sin\varphi$ でせん断応力 τ の項である。

式(2)では次式を用いる。

$\sin2\varphi=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$

$\cos2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$

このときのせん断応力τ_φは、式(4)と(5)を式(2)下に代入することで、下式のようにゼロとなる。

$$\frac{\tau_\varphi}{\cos 2\alpha} = \tau - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\tan 2\alpha = \tau - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\frac{\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

この直交する 2 断面を主応力面、また、その方向の応力σ_1, σ_2を**主応力**という。その際、式(7)のようにせん断応力はゼロとなる。

次に、せん断応力が最大、最小となる角度$\varphi = \beta$を求めてみよう。条件として$\partial\tau_\varphi / \partial\varphi = 0$を式(2)の下式に適用すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial\tau_\varphi}{\partial\varphi} = -\tau\sin 2\beta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\beta = 0 \rightarrow \quad \tan 2\beta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau} \quad \cdots\cdots(8)$$

この面は、先の主応力面と 45 度の角度を成し、**主せん断応力面**という。そのときの最大せん断応力をτ_1、最小せん断応力をτ_2とすると、最大せん断応力と最小せん断応力は次式となり、**主せん断応力**という。

$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \tau_2 = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \cdots\cdots(9)$$

断面内の応力状態は、モールの応力円を参照すると理解し易い。主応力や主せん断応力の位置がどのような関係になっているか、良く学んでおこう。

以上の応力関係を図示したものに、**モール(Mohr)の応力円**がある。応力円では、角度を 2 倍で測り、時計回りを正とする。応力が$(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$の場合、モールの応力円の中心は$(\sigma_x + \sigma_y)/2$となり、半径は式(9)の$\tau_1$となる。逆に主応力$\sigma_1, \sigma_2$から一般の$\sigma_\varphi, \tau_\varphi$を求めるには、その応力は$\sigma_1$の方向から反時計回りに$2\varphi$の角度の面に存在する。

例えば、静水圧の状態$(\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \tau = 0)$では、モールの応力円の半径は 0 であり、どの方向でも主応力面となる。また、純せん断の状態$(\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau)$では、モールの応力円の中心は原点となり、半径はこのせん断応力に等しくなる。この場合の主応力大きさは、せん断応力と同じで、互いに逆向きの応力状態となる。

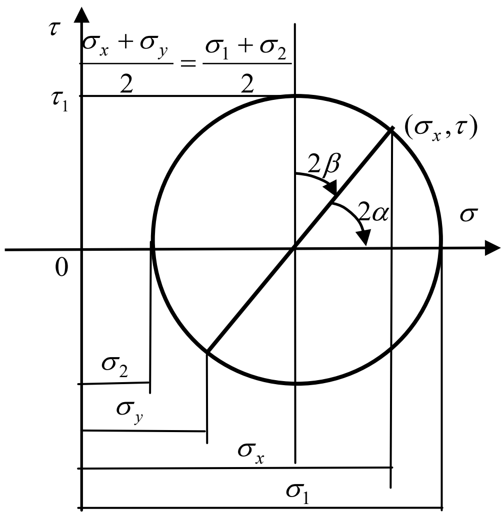
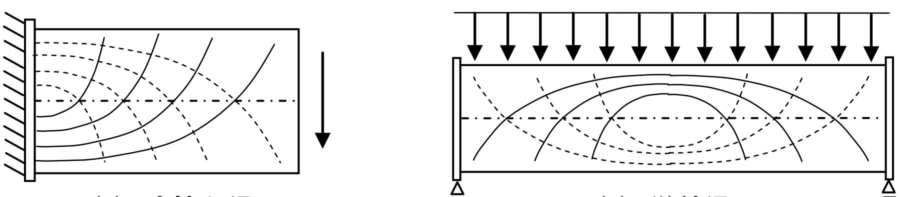


図 2 モールの応力円

平面上における主応力の 2 方向を求め、同じ主応力の方向を続けて描いた曲線を**主応力線**と呼ぶ。この主応力線の特徴として、最大応力と最小応力から描かれる曲線は互いに直交し、水平方向外力のない部材の端部、例えば、梁の上下端では、一方の主応力線は平行で他は縁に直交する。また、軸方向応力がゼロとなる中立軸上では純せん断状態となり、主応力線は中立軸に対し 45 度となっている。



(a) 片持ち梁　　**(b) 単純梁**

図 3 梁内部に生じる主応力線