基礎１４２話　非線形構造力学の基礎 まとめ

今回は、これまで学んだ構造力学の中で、非線形に関する基礎的な項目について、以下にまとめておこう。

１：**弾性論の基礎**として応力と歪の関係と変位と歪の関係がある。前者の関係が非線形の場合、**材料非線形問題**、後者が非線形の場合、**幾何学的非線形**という。材料非線形では、応力と歪の関係は履歴に依存する非線形関数になるが、増分式では下式右のように表され、係数項は歪の関数となる。建築構造力学で良く用いられる幾何学的非線形とは、以下のようにたわみによる 2 次の項が軸方向歪に加わる場合が多い。この項を加えることで、座屈や不安定現象の解析が可能となる。

応力と歪の関係：$\sigma_x = F(\sigma_x, \varepsilon_x) \rightarrow \quad \Delta\sigma_x = E_x(\varepsilon_x)\Delta\varepsilon_x$

変位と歪の関係： $\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2 - y\dfrac{d^2 v}{dx^2}$

２：非線形解析と不安定現象

応力と歪の関係が非線形であると、増分式$\Delta\sigma_x = E_x\Delta\varepsilon_x$で係数$E_x$が非線形となり、骨組の弾塑性状態を表す。弾塑性特性は一般に**骨格曲線**（バックボーンカーブ）と**履歴ループ則**によって表され、鋼やコンクリート、木材など使用する構造材料によって異なる。解析の目的や部材の状態、例えば床や耐震壁、面材を線材に置換した部材などには、骨格曲線と履歴ループ則を拡張し、特別な弾塑性履歴を設定する必要がある。さらに材と材との接合部のゆるみやすべり、基礎の浮き上がり、壁面との衝突など、材料特性とは異なる履歴も材料非線形特性として表現する。これらの特性は、実験や特別な解析から骨格曲線と履歴ループ則を決めることになる。

荷重が微小である場合、荷重―変位関係は線形挙動を示す。逆に、変位が大きくなると構造種別によって大きくその挙動が異なることになる。これを非線形挙動、あるいは大変位による挙動と呼ぶ。その際、釣合曲線上に各種の座屈挙動が生じることがある。座屈形態は**屈服型**(snap-through buckling)と**分岐型**(bifurcation buckling)に分類され、分岐型は対称分岐と非対称分岐に分かれる。また、対称分岐には安定型と不安定型があり、座屈時には座屈前の変形と全く異なる変形状態で不安定となる。特に不安定型分岐座屈の座屈後挙動は、変形モードが大きくなるに従って耐荷能力が低下する。屈服型では、座屈前の変形状態と同種の変形で不安定となる。屈服点(limit point)を越えるとその変形状態が大きくなり、荷重も低下する。リミットポイントに達した後も荷重を

増加させると、釣合状態は大きく変形し、部材の応力は圧縮状態から引張状態に瞬時に移行する。この現象は**飛び移り**と呼ばれ、実際の現象にも見られる。

３：オイラー座屈と非弾性座屈

非線形解析で、最も単純な問題は棒材の弾性座屈である。一端ピン・他端鉛直方向ローラー（水平方向拘束）支持で、材軸方向に集中荷重 P が作用し、横方向に撓む場合、モーメントの釣合は変形後の変位 $v(x)$ を用いて行う。このように座屈後の変位を用いて釣合状態を考えることは、幾何学的非線形問題を扱うことになり、**次の**ように**座屈荷重と座屈モード**が得られる。実際に生じる座屈は、$n=1$ でオイラー座屈と呼ばれる。

$$P_{cr}=EI_zk^2=(\frac{n\pi}{l})^2EI_z;\quad (n=1,2,3\cdots)\qquad v=B\sin\frac{n\pi}{l}x;\quad (n=1,2,3\cdots)$$

非弾性座屈に関する理論は、19 世紀末に相次いで発表されており、Engesser による接線係数理論、Engesser-Karman による等価係数理論が有名である。圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのが Shanley であり、提案したモデルによれば、両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値はその間に存在することを示した。

４：断面の全塑性モーメントと形状係数

曲げモーメントが増加するに従って、全断面塑性状態に漸近する。その極限として、断面の上半分は圧縮、下半分は引張の降伏応力に達する。このときの曲げモーメント M_P を**断面の全塑性モーメント**という。ここで、**塑性断面係数** Z_P を用いると、全塑性モーメントは $M_P=\sigma_yZ_P$ として表される。全塑性モーメントを弾性限曲げモーメントで割った値は、断面に特有な値となり、これを**断面の形状係数** f という。

$$f=\frac{M_P}{M_y}=\frac{\sigma_yZ_P}{\sigma_yZ}=\frac{Z_P}{Z}$$

$M-\theta$ 関係から分かるように、形状係数は断面内が最初に塑性化した時の曲げモーメントから全塑性モーメントに達するまでの倍率を表す。

５：仮想仕事の原理による骨組の崩壊解析と増分法による崩壊解析

崩壊メカニズム時の仮想仕事式と崩壊荷重係数は次式で与えられる。

$$\rho_P\sum_j P_j\delta_j=\sum_i M_i\theta_i \rightarrow \quad \rho_P=\sum_i M_i\theta_i/\sum_j P_j\delta_j$$

上式を応用して、崩壊荷重や骨組の崩壊機構（崩壊メカニズム）が求められる。その際、極限解析の上界・下界定理が有用である。コンピュータの使用を前提とする数値解析では増分法を用いるが、手計算では仮想仕事法による方法が便利である。ただし、両手法の仮定の違いや解析手法の相違によって、得られる結果に如何なる影響があるか、などを知ることが重要である。