# 基礎１３３話 No.1　曲げによる全塑性モーメント

今回は、純曲げ状態における断面内の弾塑性応力状態、特に断面内の全応力が塑性となる状態について考察し、断面の全塑性モーメントについて学ぶ。ここでは、理論を単純化するために、**完全弾塑性材料**（ヤング係数 $E$、降伏応力 $\sigma_y$、塑性後第 2 勾配はゼロ、図 2 参照）で構成された長方形断面の梁（幅：b、梁せい：D）について考える。なお、**材料が塑性状態に入っても平面保持の仮定が成り立つ**ものとする。

最初に、梁が曲げられたとき、断面内に生じる軸方向歪と応力について考えよう。

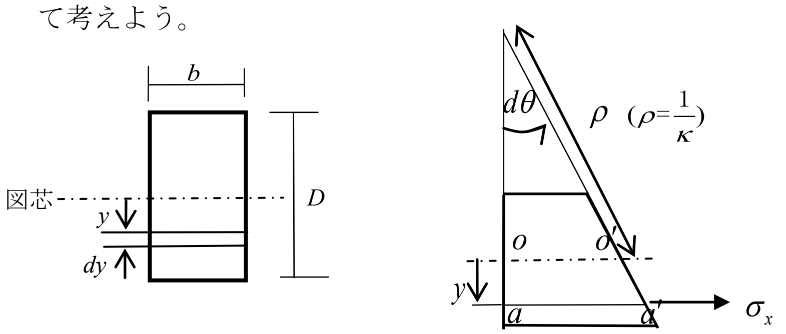


**図 1 曲げによる断面内の軸方向歪**

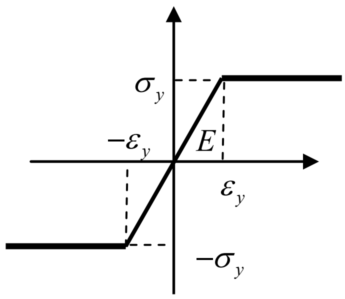


**図 2 完全弾塑性材料の応力と歪の関係**

平面保持の仮定により、図芯から $y$ だけ離れた点の歪は、曲率 $\kappa$ が小さいとすると次式で表される。

$$\frac{\overline{aa'}-\overline{oo'}}{\overline{oo'}}=\varepsilon_b=\frac{(\rho+y)d\theta-\rho d\theta}{\rho d\theta}=\frac{y}{\rho}=\kappa y \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、$\rho$ は曲率半径である。まず、曲げモーメントが小さい間、つまり断面内の軸方向応力が弾性の場合、次のフックの法則が成り立ち、式(1)を用いると応力 $\sigma_x$（以後は $\sigma$ と表記する）は次式で与えられる。

$$\sigma=E\varepsilon_b=E\kappa y \qquad \cdots\cdots(2)$$

曲げモーメント $M$ は、図 1 の微小部分 $dy$ に作用する力 $b\sigma dy$ の図芯（ここでは純曲げ状態であることから中立軸と図芯は一致する）に関するモーメント $b\sigma dy\cdot y$ を断面全体について積分し、式(2)を考慮することで次のよう得られる。

$$M=\int_{-D/2}^{D/2}b\sigma y dy=E\kappa\int_{-D/2}^{D/2}by^2dy=EI_z\kappa \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで $I_z$（以後 $I$ と表記）は次式で示される断面二次モーメントである。

$$I=\int_{-D/2}^{D/2}by^2dy \qquad \cdots\cdots(4)$$

$M$ と $\sigma$ の関係を式(2)と(3)より導くと以下のように示される。

ここでは、ベルヌーイ・オイラー梁理論の復習であり、さらに拡張して、断面内が塑性化した状態の理論を学ぶ。

$$\sigma(y) = \frac{M}{I} y \qquad \cdots\cdots(5)$$

上式のように、曲げモーメントを受ける梁断面要素の弾性応力は中立軸からの距離に比例し、断面の上下端で最大となることが理解できる。

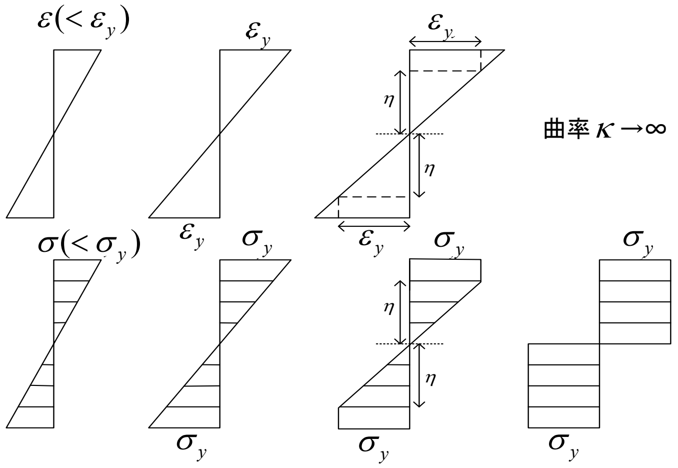


**図 3 塑性状態を含む歪と軸方向応力**

次に、曲げモーメントがさらに大きくなった場合について考えよう。断面内の歪と応力状態は、図 3 を参照されたい。曲げモーメント $M$ が増大すると、最初に断面の上下端の歪はやがて降伏歪 $\varepsilon_y$ に到達する。このときの曲げモーメントの値を $M_y$ で表し、弾性限曲げモーメントという。また、このとき $\kappa$ の値を $\kappa_y$ で表し、さらに降伏歪 $\varepsilon_y$ に最初に達する位置は $y = \pm D/2$ であるため、次の関係が、式(1)より

$$\varepsilon_y = \kappa_y \frac{D}{2} \qquad \cdots\cdots(6)$$

として得られる。また、弾性域での応力と歪の関係より、$\kappa_y$ は

$$\kappa_y = \frac{2\varepsilon_y}{D} = \frac{2\sigma_y}{ED} \qquad \cdots\cdots(7)$$

となり、従って、$M_y$ は、式(3)と(7)より

$$M_y = EI\kappa_y = \frac{I}{D/2}\sigma_y = \frac{\sigma_y bD^2}{6} \qquad \cdots\cdots(8)$$

となる。上式は、断面係数 $Z$ を用いると次式で表すことができる。

$$M_y = \sigma_y Z \qquad \cdots\cdots(9)$$

ここで、長方形断面では、断面係数は $Z = bD^2/6$ である。

曲げモーメントがさらに増大すると、$\varepsilon_y$ を越える領域が断面の内部に次第に広がっていく。$|\varepsilon| = \varepsilon_y$ である位置を $y = \pm\eta$ で表すと、$|\varepsilon|$ が $\varepsilon_y$ より小さい領域 $|y| < \eta$ では応力は弾性であり、図 4 を参考にすると、この領域の応力は次式で表される。また、$|\varepsilon|$ が $\varepsilon_y$ を越える領域 $|y| \geq \eta$ では、先に完全弾塑性を仮定したことより、応力は降伏応力に等しい。

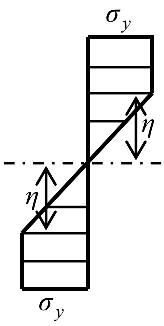


**図 4 断面内の弾塑性応力状態**

$$\sigma = E\kappa y = \sigma_y \frac{y}{\eta} \leftarrow \quad |y| < \eta \quad \cdots\cdots(10) \qquad \sigma = \sigma_y \leftarrow \quad |y| \geq \eta \quad \cdots\cdots(11)$$

このように、断面内には弾性領域と塑性領域が混在することになる。