



## 基礎 1 3 2 話 No.2 シャンレイモデルと分岐座屈

今回も、非弾性座屈についてお話しする。非弾性座屈に関する理論として、Engesser による接線係数理論と Engesser-Karman による等価係数理論があり、理論的には、より完全に思われる等価係数理論は実験結果と比べたとき多少過大となり、接線係数理論に劣るといわれていた。そのため、実験との一致か、理論的な完全さかで長い間、論争が続けられてきた。その論争に決着を付けたのが Shanley である。ここではこのモデルと得られた結果について簡単に説明しよう。

Shanley モデルは単純な構造で、図 5 のように 2 つの棒状剛体の間に 2 つのバネが取り付けられている。棒状剛体の長さは  $L$  であり、バネの長さは  $2h$ 、断面積は  $A$  とする。バネはヒンジで結合されており、バネ間は  $2r$  の間隔となっている。また、荷重は材上部に集中荷重  $P$  が作用している。

今、剛体が角度  $\alpha$  だけ傾いたものとする、バネ上部の水平変位  $v$  は

$$v = L \sin \alpha$$

となる。ここで、バネの平均圧縮ひずみを  $\bar{\epsilon}$  とすると荷重作用点における軸方向変位  $u$  は次式で与えられる。ただし、ここでは圧縮を正とする。

$$u = 2L(1 - \cos \alpha) + 2h\bar{\epsilon}$$

上式の第 1 項は剛体が角度  $\alpha$  で傾くことによる変位であり、第 2 項はバネのひずみによる変位である。これらの関係式を利用して、任意の釣合状態における全ポテンシャルの変分  $\delta V$  を求める。釣合状態では全ポテンシャルの変分がゼロとなり、次の  $e_1, e_2$  に関する静的釣合式が得られる。

$$(2AE_1 - \frac{PLh}{2r^2 \cos \alpha})e_1 + \frac{PLh}{2r^2 \cos \alpha}e_2 = P - 2A\sigma_0$$

$$\frac{PLh}{2r^2 \cos \alpha}e_1 + (2AE_2 - \frac{PLh}{2r^2 \cos \alpha})e_2 = P - 2A\sigma_0$$

上の釣合式で、増分荷重がゼロのとき変位が生じる条件、つまり不安定となる条件として、増分ひずみ  $e_1, e_2$  に関する係数行列の行列式の値をゼロとする。この条件から、座屈荷重  $P_{cr}$  が以下のように求められる。

$$P_{cr} = \frac{(4AE_1 r^2 \cos \alpha)(4AE_2 r^2 \cos \alpha)}{Lh(4Ar^2 \cos \alpha(E_1 + E_2))} = \frac{4r^2 AE_1 E_2 \cos \alpha}{Lh(E_1 + E_2)}$$

ここで、両バネの弾性係数が同じで、 $E_1 = E_1 = E_2$  であるとする、上の座屈荷重は次式となる。

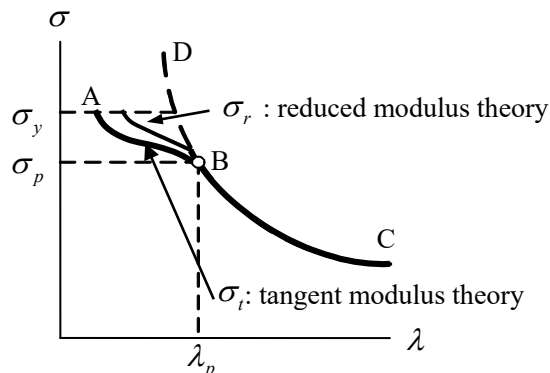


図 1 接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力

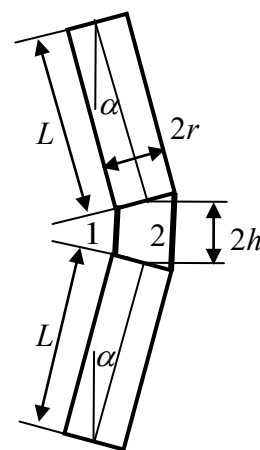


図 5 Shanley モデル

構造力学では、変分はあまりなじみがないが、微分に似ている。関数の関数である汎関数、ここでは全ポテンシャルであるが、この汎関数の極値が静的釣合式となるため、この汎関数の変分を求めている。詳細は、変分法に関するテキストを読みたい。

紙面の都合で、Shanley モデルの解説は、式の変換などを多く省いている。詳細は、「SPACE で学ぶ構造力学 静的解析編」付 1.6.3 を参照されたい。

$$P_{cr} = \frac{2r^2 AE_t}{Lh} = P_t$$

この座屈荷重は、接線係数理論による座屈荷重  $P_t$  に対応する。この系では荷重が  $P_t$  に達すると分岐座屈を生じ、そのまま軸方向変位が増加する。その釣合経路では、接戦剛性行列の行列式の値は負となり、不安定な釣合状態を示す。

次に、分岐後の釣合経路を分析する。まず、荷重を  $P = P_t + \lambda$  と置き、また  $E_1 = E, E_2 = E_t$  及び  $\beta = E_t / E$  とすると、 $\lambda / P_t$  と部材中央の変位との関係は、次式として得られる。

$$\frac{\lambda}{P_t} = \frac{(2\sqrt{1 - (\frac{v}{L})^2} - (1 + \beta))\frac{v}{r}}{(1 - \beta)\sqrt{1 - (\frac{v}{L})^2} + (1 + \beta)\frac{v}{r}}$$

さらに、横方向変位  $v$  が長さ  $L$  に比較して十分に小さいとすると、 $v/L \rightarrow 0$  と置いても良く、上の荷重と部材中央の変位との関係は下式となる。例えば  $\beta = 3/4$  として傾向を検証すると、下式右となる。

$$\frac{\lambda}{P_t} = \frac{(1 - \beta)\frac{v}{r}}{(1 - \beta) + (1 + \beta)\frac{v}{r}} \rightarrow \frac{\lambda}{P_t} = \frac{v/r}{1 + 7v/r} = \frac{1}{r/v + 7}$$

ここでは、横変位  $v$  が大きくなると  $\lambda / P_t = 1/7$  に漸近する。その値は等価係数理論による座屈荷重  $P_r$  に相当する。その釣合曲線の定性的傾向は図6に示される。まず、軸力によって軸方向変位  $u$  が生じるが、荷重が  $P_t$  に達すると分岐座屈を起こす。その後、横方向変位  $v$  が発生し、横方向にたわむ。その釣合経路は安定となり、荷重は座屈荷重  $P_t$  に漸近する。

Shanley モデルは、鉄骨非弾性座屈の実験結果を見事に説明している。このモデルによれば、真っ直ぐな棒材において応力が非弾性になる場合、tangent modulus theory による座屈荷重時で、釣合経路に分岐座屈が生じる。真っ直ぐな釣合経路は不安定釣合となるが、一方、分岐した釣合経路では安定釣合となり、水平変位が増加するに従って荷重も増加する。荷重は reduced modulus theory による座屈荷重に漸近する。つまり、分岐座屈した瞬間を捉えることができれば、実験結果は tangent modulus theory による座屈荷重に近くなる。実験結果は、両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値はその間に存在することを示すことになる。

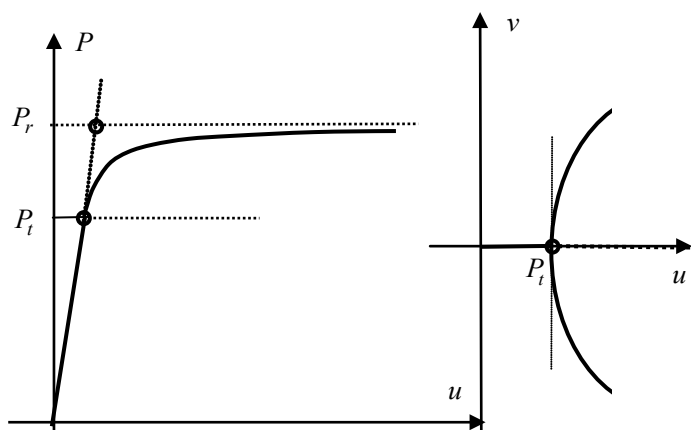


図6 Shanley モデルの釣合曲線（分岐座屈後の釣合）