



## 基礎 1 3 1 話 No.1 非弾性座屈 接線係数理論と等価係数理論

今回は、非弾性座屈についてお話しする。非弾性座屈に関する理論は、19 世紀末に相次いで発表されており、例えば Engesser による接線係数理論、Engesser-Karman による等価係数理論が有名である。前者の座屈時応力  $\sigma_t$  は接線係数  $E_t$  を用いて求められ、後者の座屈時応力  $\sigma_r$  は、引張側で除荷を考慮した等価係数  $E_r$  を用いて求められる。この 2 つの理論の間で長い論争があったが、圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのが Shanley である。ここでは、この論争について簡単に説明しよう。図 1 には、接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力が示されており、2 つの座屈時応力と Euler 応力との関係は次式で与えられる。

$$\sigma_{Euler} > \sigma_r > \sigma_t \quad \dots\dots(1)$$

まず、座屈荷重あるいは座屈時の応力と歪の関係を考える。一般に、降伏応力  $\sigma_y$  を有する材料では断面内応力はこの降伏応力を超えることはない。従って、座屈荷重も  $P_{cr} = \sigma_y A$  以上にはならない。さらに、図 3 では比例限応力  $\sigma_p$  を超えると、接線弾性係数によって座屈耐力も低下していることを示す。

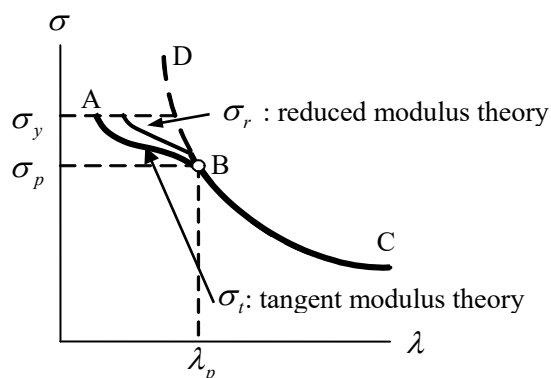


図 1 接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力

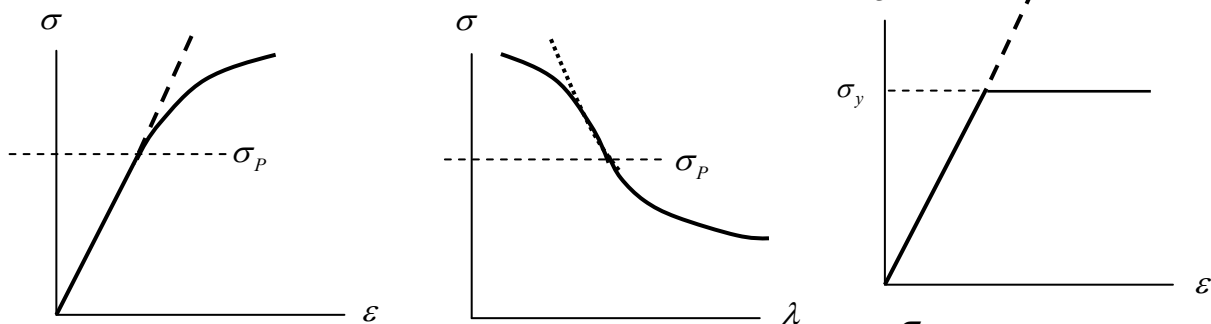


図 3 比例限以上の鋼材の応力と歪関係と座屈時応力

次に、比例限応力  $\sigma_p$  を超えた非弾性座屈に関する 2 つの理論と Shanley モデルについて概説する。実験によると降伏応力に達していないにもかかわらず、座屈荷重が Euler 座屈荷重より低く得られることがある。この場合、材料のヤング係数が比例限を越えて剛性が低下していることによると説明され、かなりの説得力を有していた。この説明を理論的に解明するために、古くから二通りの説が存在する。そのひとつが、

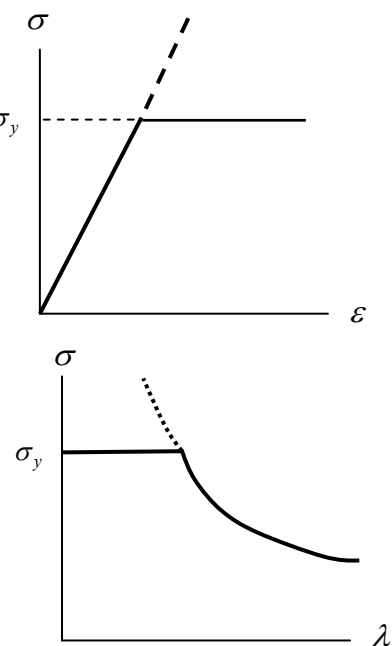


図 2 降伏応力を示す応力と歪関係と座屈時応力

Engesserによる接線係数理論(tangent modulus theory)である。柱が完全系であるとする、座屈を生じるまで柱は直線を保ち、曲げ変形は生じていない。従って、不安定になる瞬間で発生する曲げモーメントは、図4のように歪の増分に対する応力の増分を用いて計算される必要がある。応力が比例限を超えていけば、弾性係数としてその瞬間における応力-歪曲線の勾配： $E_t = d\sigma / d\varepsilon$ を、弾性域のヤング係数  $E$  の代わりに用いなければならない。図4に示すこの係数  $E_t$  を接線弾性係数という。つまり、比例限を超える応力状態では、座屈荷重はヤング係数  $E$  の代わりに接線弾性係数  $E_t$  を用いて求めれば良い。ただし、座屈前の挙動が非線形性を現すことから、線形座屈解析から求められず、増分論によって求めることになる。この説より得られた結果は実験結果と良い一致を示すことが確かめられている。

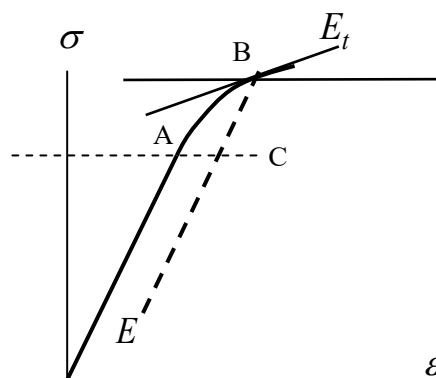


図4 鋼材の応力と歪の関係

実験結果と良い一致を示すにもかかわらず、接線係数理論には理論的に疑わしい点があると指摘されていた。今、図4において圧縮状態で点Aの比例限の応力を超え、点Bに示す応力の状態に進んだとする。そこで、荷重が一定の状態では曲げ変形が発生するものとする、断面内には曲げモーメントが生じ、断面の一部では圧縮応力は増加するが、残りの領域では圧縮応力に除荷が起きる。また荷重が一定であることから、増分時の圧縮応力と除荷分の応力の和はゼロでなくてはならない。さて、このような状態で圧縮応力が増加する領域では接線弾性係数  $E_t$  が用いられるが、一方、除荷領域では図4の点Cに移動するため、除荷弾性係数を使わなければならない。その剛性は接線弾性係数より大きく、多くの場合ヤング係数  $E$  に等しい。従って、圧縮応力が増加する領域では  $E_t$  を、また減少する領域では  $E$  を使用するのが正しいということになる。Engesser と Von Karman によるこの方法は等価係数理論 (reduced modulus theory) と呼ばれている。当然、得られる座屈荷重は接線係数理論によって求めた座屈荷重より高くなる。

理論的には、より完全に思われる等価係数理論は実験結果と比べたとき多少過大となり、接線係数理論に劣るといわれていた。そのため、実験との一致か、理論的な完全さかで長い間、論争が続けられてきた。接線係数理論の欠点は座屈時に生じる除荷を無視している点であり、また、等価係数理論の欠点は、 $\delta P = 0$  という重要な仮定の根拠が曖昧に使用されている点である。この論争は次回で説明する Shanley モデルによって決着が図られることになる。