基礎１２話 No.2　断面力から応力分布や最大応力を求める

前回に続いて、部材が軸力と曲げを同時に受けるとき、断面内に生じる応力分布についてお話しする。まず、前回定義した断面力、つまり軸力と曲げモーメントを具体的に求めてみよう。ここでは、歪分布は平面保持の仮定による式(2)を用い、応力と歪の関係は式(3)を用いる。軸力は式(4)左であり、ε_0 と κ が x のみの関数であることから次式となる。

$$N = \int_A \sigma_x dA = E\int_A \varepsilon_x dA = E\int_A (\varepsilon_0 + \kappa y) dA = E(\varepsilon_0 \int_A dA + \kappa \int_A y dA) \quad \cdots(5)$$

上式右の右辺中の積分は、部材の断面が決まれば、計算することができる。ここで、上の積分を次に示す記号で表す。

$$A = \int_A dA; \quad S_z = \int_A y dA \quad \cdots\cdots(6)$$

上式左の積分 A は断面積を表し、右の S_z は断面に関する一次のモーメントを表すことから、**断面一次モーメント**と呼ばれる。

部材の図芯とは、断面内の断面一次モーメントをゼロとする位置である。つまり、図芯を原点とすれば、断面一次モーメントはゼロとなる

この断面一次モーメントは z 軸を中心とするモーメントであることから、y 軸の原点を移動することによって、モーメントがゼロとなる位置が存在する。この位置を y 軸の原点とすれば、断面一次モーメント S_z はゼロとなる。同様に、y 軸に関する断面一次モーメント S_y も、断面内の座標軸を移動することによって、ゼロにすることができる。両者の**断面一次モーメントがゼロとなる位置を断面の図芯位置**と呼び、今後、この位置を断面内の座標原点とする。以前、座標原点を断面の中心位置に設定するといったが、実は、座標原点はこの図芯位置を指す。具体的な図芯位置の求め方は、後で説明しよう。

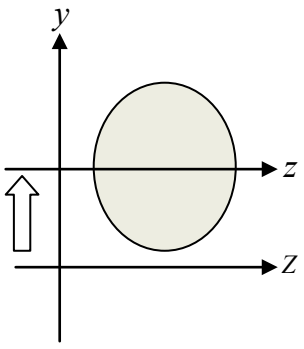

図 5 断面の図芯位置

図芯位置を原点にとると軸力を表す式(5)の第 2 項は当然ゼロとなり、軸力は次式となる。

$$N = E\varepsilon_0 A = \sigma_0 A \quad \cdots\cdots(7)$$

ただし、応力は弾性域であり、また、断面は一様な材料であることを仮定する。従って、次式が成立し、上式はこれを用いている。

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 \quad \cdots\cdots(8)$$

次に、曲げモーメント M を求めてみよう。曲げモーメントの定義式(4)右に応力と歪の関係式(3)及び歪の式(2)を代入すると、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M = \int_A \sigma_x y dA = E(\varepsilon_0 \int_A y dA + \kappa \int_A y^2 dA) \quad \cdots\cdots(9)$$

軸力を計算したときと同様、上式中に 2 種類の積分が出現する。この中で、次式で示す I_z は断面に関する二次のモーメントを表すことから**断面二次モーメント**と呼ばれる。

$$I_z = \int_A y^2 dA \qquad \cdots\cdots(10)$$

また、式(9)の中には、軸力の場合と同様に、断面一次モーメントが含まれるが、断面内の座標として図芯位置を原点にとることで、断面一次モーメントはゼロとなる。無論、式(10)で示される断面二次モーメントも図芯位置を原点にして積分する。従って、断面一次モーメントがゼロとなることから、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M = EI_z\kappa \rightarrow \kappa = M / EI_z \qquad \cdots\cdots(11)$$

このように、軸力は仮定した軸方向歪ε_0によって、また、曲げモーメントは曲げ歪の係数、つまり曲率κによって生じることが理解できる。

曲げによって生じる軸方向応力σ_bは、応力と歪の関係式(3)と曲げモーメントが軸方向歪ε_0に無関係であることを考慮すると、

$$\sigma_b = E\varepsilon_x = E\kappa y \qquad \cdots\cdots(12)$$

で与えられる。従って、軸力によって生じる応力σ_0と曲げモーメントによって生じる応力σ_bは各々式(7)及び式(11)と(12)より次のように得られる。

$$\sigma_0 = \frac{N}{A}; \quad \sigma_b = \frac{M}{I_z} y \qquad \cdots\cdots(13)$$

断面内の応力状態は、軸力と曲げモーメントが同時に加わる場合、各々の応力を重ね合わせることによって以下のように得られる。

この表現は 2 次元応力状態であることに注意！

$$\sigma_x = \sigma_0 + \sigma_b = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y \qquad \cdots\cdots(14)$$

上式は、仮定した歪と同じように、yに関する一次式となっている。そのため、圧縮及び引張の最大応力が生じる位置は、図芯より最も遠い梁断面の縁となることが分かる。この応力を**縁応力**と呼び、以下の式で得られる。

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c} \qquad \cdots\cdots(15)$$

ここで、σ_tを下端縁応力(引張側縁応力)、σ_cを上端縁応力(圧縮側縁応力)と呼ぶ。また、Z_t及びZ_cは各々下端と上端に関する**断面係数**と呼び、以下の式で与えられる。

$$Z_t = \frac{I_z}{y_t}; \quad Z_c = \frac{I_z}{y_c} \qquad \cdots\cdots(16)$$

上式で、y_tとy_cは断面内で図芯位置から、各々、引張応力が生じる断面の縁までの距離と圧縮が生じる断面の縁までの距離である。無論、圧縮側と引張側の断面形状が図芯に対し対称であるときは、Z_tとZ_cは同じ値となる。

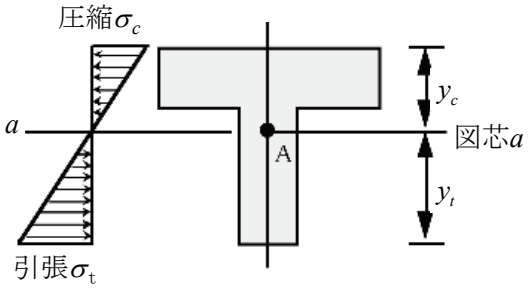

図 6 T 型梁の図芯と曲げによる応力分布