基礎１２８話 No.1　オイラー座屈と固有値問題

付 27 話参照
ex127_1 ~ ex127_3

今回は、非線形解析で最も単純な問題である棒材の弾性座屈について学ぶ。ここでは、図 1 に示す一端ピン・他端鉛直方向ローラー（水平方向拘束）支持で、材軸方向に集中荷重 P が作用している場合について考える。同図には座屈した瞬間の状態が示されており、モーメントの釣合は変形後の変位 $v(x)$ を用いて行う。このように座屈後の変位を用いて釣合状態を考えることは、幾何学的非線形問題を扱うことに相当する。この問題は、幾何学的非線形性を扱う最初の課題となる。

図 1 の変形状態を考え、釣合式を求める。座標原点から x 離れた点 A におけるモーメントの釣合は、

$$-M_z(x) + v(x)P = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

で与えられる。さらに、梁の微分方程式

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x) \qquad \cdots\cdots(2)$$

を式(1)に代入すると、次式のように座屈挙動を支配する 2 階の微分方程式が得られる。

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + Pv = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで、$k^2 = P / EI_z$ と置くと、上式は以下の式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2 v = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

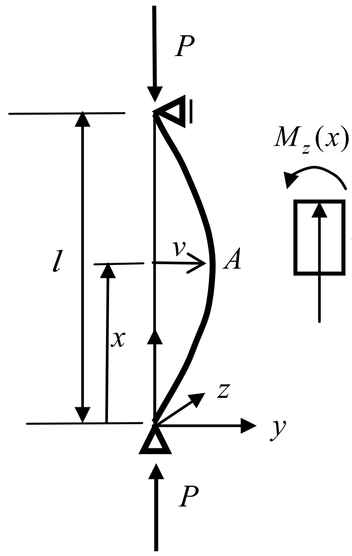

図 1 一端ピン･他端ローラー支持柱の座屈

上式の解は一般解に剛体変位を加えると下式で与えられる。

$$v(x) = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D \qquad \cdots\cdots(5)$$

一端ピン･他端ローラー支持に対する境界条件として、柱両端 $x = 0, l$ で、$v = 0, M = 0$ の 4 つを用い、この条件を上式に適用すると、$A = C = D = 0$ と $B\sin kx = 0$ が得られる。ここでは最後の式が有意であり、この条件式より $B = 0$ あるいは $\sin kl = 0$ を得ることになる。前者の $B = 0$ は、部材が真直ぐとなる解であり、また $B \neq 0$ の場合は、部材が曲がりながら釣合っている状態を表す。後者の状態を座屈(buckling)と呼び、次式が成立する。

$$\sin kl = 0 \quad \to \quad kl = n\pi \to k = \frac{n\pi}{l}; \quad (n = 0,1,2,3\cdots) \qquad \cdots\cdots(6)$$

上式において、$n = 0$ は $B = 0$ と同じであり、従って、座屈条件を満足する値として $n = 1,2,3\cdots$ が考えられる。上式を $k^2 = P / EI_z$ に代入すると、次の**座屈荷重** P_{cr} が得られる。

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EI_z; \quad (n = 1,2,3\cdots) \qquad \cdots\cdots(7)$$

また、式(6)を式(5)に代入すると、座屈時の変形状態が次式で与えられ、これらは一般に**座屈モード**と呼ばれる。

$$v(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x; \quad (n = 1,2,3\cdots) \qquad \cdots\cdots(8)$$

座屈条件を満足する値 $n = 1,2,3\cdots$ に対応する座屈荷重と座屈モードを図 2 に示す。

R52：オイラー座屈：座屈荷重と座屈モード

$n=1 \quad P_E = EI_z\dfrac{\pi^2}{l^2}$　　$n=2 \quad P_2 = EI_z\dfrac{4\pi^2}{l^2} = 4P_E$　　$n=3 \quad P_3 = EI_z\dfrac{9\pi^2}{l^2} = 9P_E$

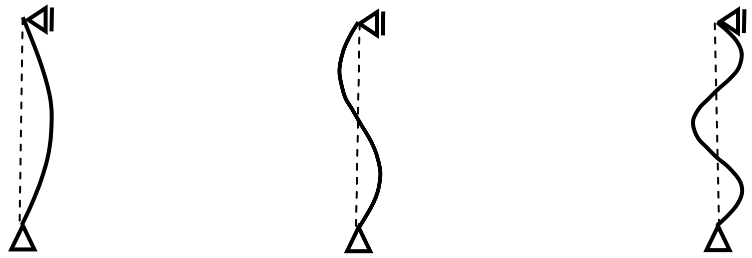

図 2 一端ピン・他端ローラー支持柱の座屈荷重と座屈モード

上の座屈の内、実際に生じる座屈現象は最も小さい $n=1$ で与えられ、その荷重は **Euler(オイラー)座屈荷重** P_E と呼ばれる。座屈する瞬間の圧縮応力 σ_E は Euler 座屈荷重を断面積で割ることで求められる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{EI_z\pi^2}{Al^2} \qquad \cdots\cdots(9)$$

上式に、$i^2 = I_z / A$ で定義する断面二次半径 i を用いると弾性座屈応力 σ_E は次式となる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2\left(\dfrac{A}{I_z}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\left(\dfrac{l}{i}\right)^2} \qquad \cdots\cdots(10)$$

さらに、材長と断面二次半径の比を、下式で示す新たなパラメータ**細長比 λ** を導入すると、

$$\lambda = \frac{l}{i} \qquad \cdots\cdots(11)$$

式(9)の弾性座屈応力は、細長比のみの関数として以下のように与えられる。

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \cdots\cdots(12)$$

上式で $\lambda \to 0$ となる太短い部材の極限では、弾性座屈応力は $\sigma_E \to \infty$ となる。しかしながら、材の応力は降伏応力 σ_y を超えることはなく、式(12)の弾性座屈応力の式は成立しない。このことから、座屈応力と細長比の関係が図 3 のように得られる。

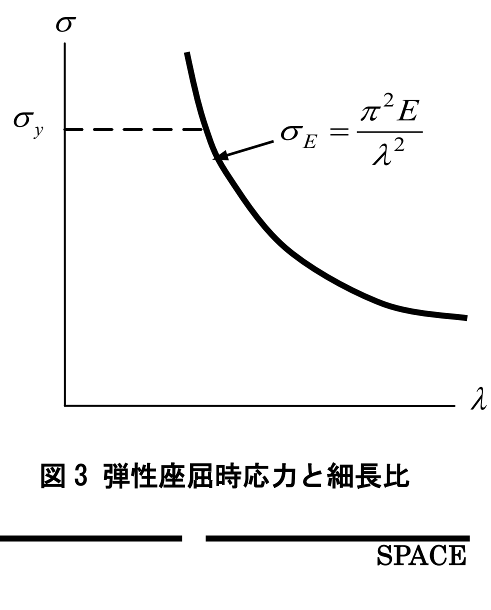

図 3 弾性座屈時応力と細長比