



基礎 1 2 6 話 No.1 幾何学的非線形と材料非線形

今回から、骨組の非線形解析についてお話しする。特にここでは、非線形性とは何か、また骨組の非線形挙動とは何かについてお話しし、さらに骨組の安定・不安定について説明する。以前、「弾性論における基本は、次の2つの関係である」という話をした。

1 : 応力と歪の関係

2 : 変位と歪の関係

ベルヌーイ・オイラー梁では、上の2つの関係は次式で表されるように、各々1つの式となる。左側が応力と歪の関係、右側が変位と歪の関係である。

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa y = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2}$$

この2つの関係が上のように線形であれば、ここから派生する骨組の挙動は線形となる。一方、この関係のどちらかが非線形であれば、この関係から成立する骨組の挙動は非線形性を有する。左側の応力と歪の関係が非線形性を示すと**材料非線形問題**という。右側の変位と歪の関係が非線形性を示すと**幾何学的非線形問題**という。無論両者とも非線形性を示す場合もあり、この種の問題を**混合非線形問題**という。

まず、応力と歪の関係で非線形とは如何なるものか考えてみよう。応力と歪の関係は材料固有の特性を表し、例えば、代表的な構造用材料である鋼材は図1のような履歴となる。同図の応力と歪の関係で、線形ではヤング係数 E_x は定数であり、材料によって異なる値を採る。例えば、鉄骨構造では $E_x = 20500kN/cm^2$ である。一方、非線形関係になると、この関係は骨格曲線で表される。鉄骨では比較的力学で扱い易い形をしており、特にコンピュータで扱うために図1の点線のように2つの直線で表すことが多い。そのため、この種の非線形性はバイリニア型と呼ばれる。特に、塑性状態を表す直線に勾配がない場合、これを完全弾塑性型という。弾塑性解析が理論的に行われる場合は、この完全弾塑性型の履歴特性が多く用いられる。

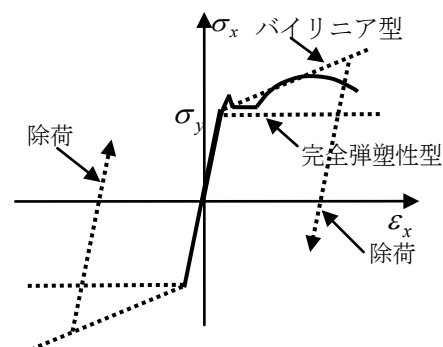


図1 鋼材の応力と歪の関係

鋼の E : $20500kN/cm^2$ コンクリート : およそ鋼の1/10 木造 : $700 \sim 1000kN/cm^2$

応力と歪の関係が非線形であると、関係式は増分形式で表され、 $\Delta\sigma_x = E_x \Delta\varepsilon_x$ で E_x が歪の関数となり、骨組の弾塑性状態を表す。弾塑性特性は一般に**骨格曲線** (バックボーンカーブ) と**履歴ループ則**によって表され、鋼やコンクリート、木材など使用する構造材料によって異なる。骨格曲線は、バイリニア、トリリニアなど直線を結合した区分線形化手

法と、RO モデルや HD モデルなど曲線で表す方法がある。履歴特性は幾何学的非線形とは異なり、除荷によって元の釣合曲線には戻らず、新たな除荷曲線上を移動する。また、応力がゼロとなっても残留歪が残る。

平板や曲面板は、材料そのものの特性を用いて弾塑性状態を求めるが、多様に構成される骨組構造では、上記の材料特性のみでは解析できない。解析の目的や部材の状態、例えば床や耐震壁などの面材を線材に置換した部材には、骨格曲線と履歴ループ則を拡張して、特別な弾塑性履歴を設定する必要がある。さらに材と材との接合部のゆるみやすべり、基礎の浮き上がり、壁面との衝突など、材料特性とは異なる履歴も材料非線形特性として表現する。これらの特性は、実験や特別な解析から骨格曲線と履歴ループ則を決めることになる。

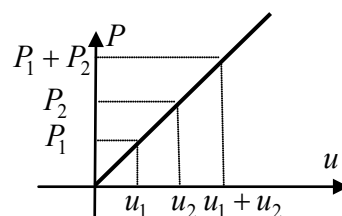
次に幾何学的非線形問題について考えてみよう。大変形を考慮するためには、変位と歪の関係を非線形として扱わなければならない。連続体の変形は、Euler 表示あるいは Lagrange 表示で表すことができ、前者は変形後の点を、後者は変形前の点を座標の基点に考える。ここでは、ベルヌーイ・オイラー梁に対し Lagrange 表示を用い、法線保持の仮定を適用すると、次の 2 次の非線形項を考慮した非線形軸歪が得られる。ただし、曲げによる歪は線形とし、大きな曲率の変化は考慮しない。逆に部材が大きく曲げられる場合は、曲率の非線形性を考慮する必要があるが、建築で扱う梁・柱ではそれほど大きく曲げられることはないので、線形として扱う場合が多い。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2v}{dx^2} \\ &= \varepsilon_L + \varepsilon_N + \kappa y \end{aligned}$$

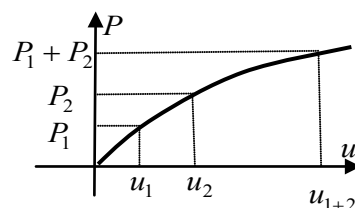
ここで、 ε_L は線形歪、 ε_N は非線形歪、 κy は曲げによる線形歪である。非線形歪 ε_N を加えることで、座屈や不安定現象など、多くの特異な現象が解明できる。これについては次回お話しする。

線形問題の特徴は重ね合わせの原理の成立である。非線形ではこの原理が成り立たない。例えば、図 2(a) の長期荷重と短期荷重である地震、風、雪荷重などを個別に応力解析し、その後、短期と長期荷重による応力を加え合わせて断面算定を行う。これが可能なのは、全て線形解析であり、重ね合わせの原理が成立するからである。非線形解析では図 2(b) のように荷重 P_1 と荷重 P_2 の各々の変位の和 $u_1 + u_2$ と、両荷重の和 $P_1 + P_2$ に対する変位 u_{1+2} とが異なるため、重ね合わせの原理は成立しない。そのため、非線形解析を行う場合、まず、長期荷重を加え、その状態に短期荷重である地震荷重や風荷重を加えて解析する必要がある。

RO(Ranberg-Osgood) モデルとは、指数関数を用いた曲線で骨格曲線や除荷時の履歴を表し、金属材料などの履歴に用いられる。
HD(Hardin-Drnevich)モデルは、双曲線を用いた関数で地盤の履歴特性などに用いられる。詳細は他の文献を参照されたい。



(a) 線形解析



(b) 非線形解析

図 2 重ね合わせの原理